

15 aprile 2014  
3<sup>a</sup> prova in itinere (compitino)  
Analisi Matematica 1

1. Calcolare tutte le primitive della funzione

$$f(x) = \frac{2e^{3x} + e^{2x} + 4e^x - 1}{e^{2x} + 1}$$

determinandone il dominio di definizione.

La funzione  $f(x)$  è definita e continua  $\forall x \in \mathbb{R}$ , e dunque  $f$  risulta integrabile su  $[a, b] \forall a, b \in \mathbb{R}$ , e dunque - comunque si fissi  $a \in \mathbb{R}$  - la primitiva  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  è definita  $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\int f(x) dx = \int \frac{2e^{3x} + e^{2x} + 4e^x - 1}{e^{2x} + 1} dx \stackrel{\substack{t = e^x \\ \log t = x \\ \frac{1}{t} = \frac{dx}{dt}}}{=} \left( \int \frac{2t^3 + t^2 + 4t - 1}{t^2 + 1} \frac{dt}{t} \right)_{t=e^x}$$

$$= \left( \int \left( \frac{2t^3 + 2t}{t^2 + 1} + \frac{t^2 + 2t - 1}{t^2 + 1} \right) dt \right)_{t=e^x} = \left( 2t + \int \left( \frac{A}{t} + \frac{Bt+C}{t^2+1} \right) dt \right)_{t=e^x}$$

$$\frac{t^2 + 2t - 1}{t^2 + 1} = \frac{At^2 + A + Bt + Ct}{t^2 + 1} \Leftrightarrow \begin{cases} AB = 1 \\ C = 2 \\ A = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = 2 \\ C = 2 \end{cases}$$

$$\stackrel{(*)}{=} \left( 2t - \int \frac{dt}{t} + \int \frac{2t}{t^2+1} dt + 2 \int \frac{dt}{t^2+1} \right)_{t=e^x} =$$

$$= \left( 2t - \log|t| + \log(1+t^2) + 2 \arctan t + c \right)_{t=e^x}$$

$$= 2e^x - x + \log(1+e^{2x}) + 2 \arctan e^x + c \quad c \in \mathbb{R}$$

2. Sia

$$F(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t^2 + 1} dt.$$

Determinare il dominio di  $F$ , i limiti agli estremi del dominio (non è richiesto il valore esplicito nel caso in cui il limite sia finito), il segno di  $F$ , eventuali asintoti, regioni di crescita/decrecenza, regioni di concavità/convessità. Rappresentare graficamente i risultati ottenuti. Disegnare sul grafico la retta tangente nel punto  $(1, F(1))$ .

**DOMINIO**

La funzione integranda  $f(t) = \frac{e^t}{1+t^2}$  è definita e continua  $\forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow$  la funzione  $f$  è integrabile su  $[a, b] \forall a, b \in \mathbb{R}$   
 $\Rightarrow F(x) = \int_1^x f(t) dt$  è definita  $\forall x \in \mathbb{R}$

# LIMITI AGLI ESTREMI DEL DOMINIO

La funzione  $f(x)$  è  $> 0 \forall x \in \mathbb{R}$ , dunque i limiti  $+\infty$  e  $-\infty$  esistono: dobbiamo decidere se sono finiti o no

$$\boxed{-\infty} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_1^x f(t) dt = \lim_{x \rightarrow -\infty} - \int_x^1 f(t) dt \in \mathbb{R}$$

$$\text{infatti } 0 \leq e^t \leq e \quad \forall t \leq 1 \Rightarrow -e \leq -e^t \leq 0 \quad \forall t \leq 1$$

$$\Rightarrow -\frac{e}{1+t^2} \leq -\frac{e^t}{1+t^2} \leq 0 \quad \forall t \leq 1$$

*(Teorema Comparato)  
(Integrali)*

$$\Rightarrow -e \left[ \arctan t \right]_{t=x}^{t=1} = \int_x^1 -\frac{e}{1+t^2} dt \leq - \int_x^1 f(t) dt \leq 0$$

*(Teorema Comparato)  
(Limiti)*

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ e \arctan x - e \cdot \frac{\pi}{4} \right] \leq \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) \leq 0$$

$$\Rightarrow -\frac{3}{4}\pi e \leq \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = L$$

La retta  $y=L$  è un asintoto orizzontale per  $f$  quando  $x \rightarrow -\infty$

$\boxed{+\infty}$  Quando  $t \rightarrow +\infty$ ,  $e^t \rightarrow +\infty$  "più velocemente" di qualsiasi potenza di  $t \Rightarrow \frac{e^t}{1+t^2} \rightarrow +\infty$  per  $t \rightarrow +\infty$  in quanto

$$e^t = \left(e^{t/4}\right)^4 \geq \left(1 + \frac{t}{4}\right)^4 \geq \frac{t^4}{256} \quad \forall t \geq 1$$

e dunque

$$f(t) = \frac{e^t}{t^2+1} \geq \frac{\frac{t^4}{256}}{t^2+1} = \frac{1}{256} \frac{(t-1)t^3+t^3}{t^2+1} \stackrel{t \geq 2}{\geq} \frac{1}{256} \frac{t^3+t}{t^2+1} = \frac{t}{256}$$

$t \geq 2 \Rightarrow t^3 \geq t$

da cui segue

$$\begin{aligned} \int_1^x f(t) dt &= \int_1^2 f(t) dt + \int_2^x f(t) dt \geq \int_1^2 f(t) dt + \int_2^x \frac{t}{256} dt \\ &= \int_1^2 f(t) dt + \left[ \frac{t^2}{512} \right]_{t=2}^{t=x} \end{aligned}$$

ovvero  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) \geq \int_1^2 f(t) dt + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{x^2}{512} - \frac{1}{128} \right] = +\infty$

Esiste asintoto obliquo per  $x \rightarrow +\infty$  per  $F$ ? NO: infatti

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{e^x}{1+x^2}}{1} \stackrel{(H)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x} \stackrel{(H)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$$

(era deducibile dal fatto che  $\frac{e^x}{1+x^2}$  cresce "troppo velocemente" quando  $x \rightarrow +\infty$ )

## SEGNO

$$f(t) > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad F(1) = 0 \Rightarrow F(x) = \int_1^x f(t) dt \begin{cases} > 0 & \forall x > 1 \\ < 0 & \forall x < 1 \end{cases}$$

## MONOTONIA

$$F'(x) = f(x) = \frac{e^x}{1+x^2} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow F(x) \text{ \textit{\textbf{è crescente}} strettamente } \forall x \in \mathbb{R}$$

## CONVESSITÀ

$$F''(x) = f'(x) = \frac{e^x(1+x^2) - 2xe^x}{(1+x^2)^2} = \frac{e^x}{(1+x^2)^2} (x^2 - 2x + 1)$$
$$= \frac{e^x}{(1+x^2)^2} (x-1)^2 \begin{cases} > 0 & \forall x \neq 1 \\ = 0 & x = 1 \end{cases}$$

ed essendo  $F(x)$  di classe  $C^2$ , ne deduce che  $F(x)$  \textit{\textbf{è convessa}} strettamente  $\forall x \in \mathbb{R}$

## RETTA TANGENTE IN $(1, F(1))$

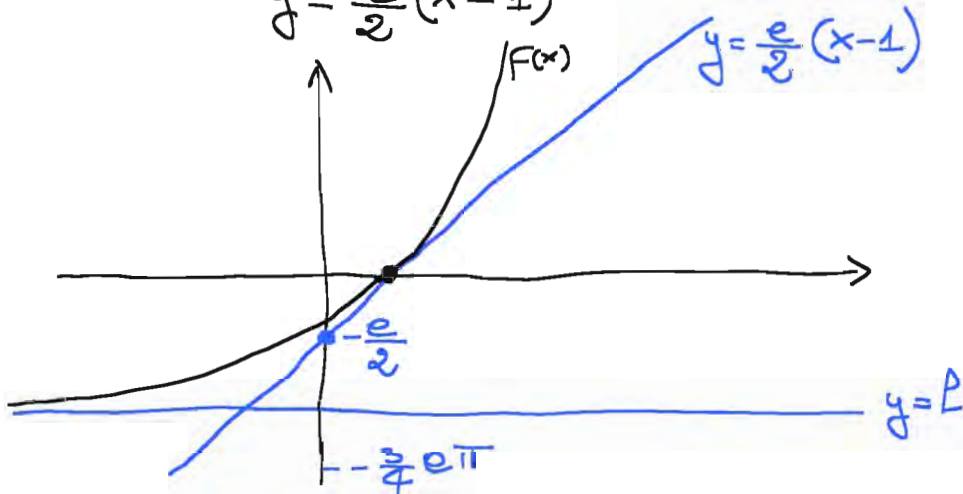
L'equazione della retta tangente al grafico di  $F$  nel punto  $(1, F(1)) = (1, 0)$  \textit{\textbf{è data da}}

$$y - F(1) = F'(1) \cdot (x - 1)$$

$$\text{ma } F(1) = 0, \text{ mentre } F'(x) = \frac{e^x}{1+x^2} \Rightarrow F'(1) = \frac{e}{2}$$

da cui segue che l'equazione \textit{\textbf{è}}

$$y = \frac{e}{2}(x-1)$$



3. Studiare la convergenza dell'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{(e^x - 1)^\alpha} dx$$

al variare del parametro  $\alpha > 0$ .

$$f(x) = \frac{\sin x}{(e^x - 1)^\alpha} \text{ \textit{\textbf{e}} definita e continua su } ]0, +\infty[ \text{ \textit{\textbf{v}}a } x > 0$$

Si tratta quindi di studiare la convergenza di

$$\int_0^1 f(x) dx \text{ e } \int_1^{+\infty} f(x) dx$$

① STUDIO DELLA CONVERGENZA di  $\int_0^1 f(x) dx$

Quando  $x \rightarrow 0^+$   $\begin{cases} \sin x = x + o(x^2) \\ e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \end{cases}$  da cui segue

$$f(x) = \frac{x + o(x^2)}{(x + o(x^2))^\alpha} = \frac{x}{x^\alpha} \frac{1 + o(x)}{(1 + o(1))^\alpha} \sim \frac{1}{x^{\alpha-1}} \quad x \rightarrow 0^+$$

$$\left( \text{infatti } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x^{1-\alpha}} = 1 \right)$$

Ha  $\int_0^1 \frac{dx}{x^{\alpha-1}}$  converge se  $\alpha-1 < 1$  se  $\alpha < 2$

Per il criterio del confronto asintotico

$\int_0^1 f(x) dx$  converge se  $\alpha < 2$

② STUDIO DELLA CONVERGENZA di  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$

Si osserva, per  $x \rightarrow +\infty$ , che

$$e^x = (e^{\frac{x}{k}})^k \geq \left(1 + \frac{x}{k}\right)^k \geq 1 + \frac{x^k}{k^k} \quad \forall x \geq 1 \quad \forall k > 0$$

e dunque

$$(e^x - 1)^\alpha \geq \left(\frac{x^k}{k^k}\right)^\alpha = \frac{x^{k\alpha}}{k^{k\alpha}} \quad \forall x \geq 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x)| = \frac{|\sin x|}{(e^x - 1)^\alpha} \leq \frac{1}{(e^x - 1)^\alpha} \leq \frac{k^{k\alpha}}{x^{k\alpha}} \quad \forall x \geq 1 \quad \forall k > 0$$

La corrispondenza ad  $\alpha > 0$  si può scegliere  $k > 0$  t.c.

$$k\alpha \geq 2 \Leftrightarrow k \geq \frac{2}{\alpha} \text{ parte intera di } \frac{2}{\alpha}$$

Scegliamo dunque  $k = \lfloor \frac{2}{\alpha} \rfloor + 1$

Con questa scelta si ha che

$$\forall x > 0 \quad |f(x)| \leq \frac{k^{k\alpha}}{x^{k\alpha}} \leq \frac{c}{x^2} \quad \forall x \geq 1 \text{ dove } c = k^{k\alpha} > 0$$

$f: [1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  continua

$$\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x^2} dx \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \text{(Criterio Confronto)} \quad \int_1^{+\infty} f(x) dx \in \mathbb{R} \quad \forall \alpha > 0$$

Dunque ① + ② ci dicono che

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx \in \mathbb{R} \quad \forall \alpha \in ]0, 2[$$

1.

(a) Sia  $F$  la funzione dell'esercizio 2. Calcolare il polinomio di Taylor di  $F$  di ordine 3 centrato in  $x=1$ .

(b) Sia  $f$  una funzione derivabile tre volte in  $\mathbb{R}$  il cui polinomio di Taylor di ordine 3 centrato in  $x=2$  è  $P(x) = 3 - 2(x-2)^2 + 6(x-2)^3$ . È possibile stabilire la natura del punto  $x=2$ ? In caso affermativo determinarne la natura.

a) La via più semplice è calcolare  $F^{(k)}(1)$   $k=0,1,2,3$

$$F(x) = \int_1^x \frac{e^t}{1+t^2} dt \quad F'(x) = \frac{e^x}{1+x^2} \quad F''(x) = \frac{e^x}{(1+x^2)^2} (x-1)^2$$

$$F'''(x) = \frac{[e^x(x-1)^2 + 2e^x(x-1)](1+x^2) - 2x e^x (x-1)^2}{(1+x^2)^4}$$

$$F(1) = 0 \quad F'(1) = \frac{e}{2} \quad F''(1) = 0 \quad F'''(1) = 0$$

$$P_3(x) = \frac{e}{2}(x-1) \quad e \quad f(x) = \frac{e}{2}(x-1) + o((x-1)^3) \quad x \rightarrow 1$$

$$b) P_3(x) = 3 - 2(x-2)^2 + 6(x-2)^3 \quad \text{ovvero}$$
$$f(x) = P_3(x) + o((x-2)^3) \quad x \rightarrow 2$$

$$\text{Essendo } P_3(x) = f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 + \frac{f'''(2)}{3!}(x-2)^3$$

si ha

$$f(2) = 3 \quad f'(2) = 0 \quad f''(2) = 2! \cdot (-2) = -4 \quad f'''(2) = 3! \cdot 6 = 36$$

$x_0=2$  è punto di max relativo interno

$$\text{1° modo } f'(2) = 0 \quad e \quad f''(2) = -4 < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(2) = 0 \quad \text{ed } \exists \delta > 0: f'(x) \text{ strettamente decrescente in } ]2-\delta, 2+\delta[$$

$$\Rightarrow x_0=2 \text{ punto max relativo interno}$$

$$\begin{aligned} 2^\circ \text{ modo } f(x) &= 3 - 2(x-2)^2 + 6(x-2)^3 + o((x-2)^3) \\ &\stackrel{!}{=} 3 - 2(x-2)^2 + o((x-2)^2) \quad x \rightarrow 2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x) - 3 = -2(x-2)^2 + o((x-2)^2) \quad x \rightarrow 2$$

$$\Rightarrow \frac{f(x) - 3}{(x-2)^2} = -2 + o(1) \quad x \rightarrow 2$$

$$\Rightarrow \exists \delta > 0 : \forall x \in ]2-\delta, 2+\delta[ \quad f(x) - 3 \leq 0$$

ouvro  $x_0 = 2$  é ponto max relativo interno