# Correzione della prova in itinere del 21 gennaio 2014

1. Data la serie
$$\sum_n \binom{4n}{2n}\left(\frac{1}{x^2+6x}\right)^n,$$
stabilire per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ converge e per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ converge assolutamente.

$$a_n = \frac{(4n)!}{(2n)!\,(2n)!} \cdot \left(\frac{1}{x^2+6x}\right)^n$$

Applico il criterio del rapporto

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\cancel{(4n)!}\,(4n+1)(4n+2)(4n+3)(4n+4)}{\cancel{(2n)!}\,\cancel{(2n)!}\,(2n+1)^2(2n+2)^2} \cdot \frac{\cancel{(2n)!}\,\cancel{(2n)!}}{\cancel{(4n)!}} \cdot \left|\frac{1}{x^2+6x}\right|$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} \left|\frac{16}{x^2+6x}\right| = \ell$$

Per il criterio del rapporto, se $\ell < 1$ la serie converge!

$$\left|\frac{16}{x^2+6x}\right| < 1 \quad \text{se} \quad |x^2+6x| > 16 \quad \text{se} \quad \begin{cases} x \in (-6,0) \\ -x^2-6x > 16 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} x \notin (-6,0) \\ x^2+6x-16 > 0 \end{cases}$$

$$\text{se} \quad \begin{cases} x \in (-6,0) \\ x^2+6x+16 < 0 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} x \notin (-6,0) \\ x \in ]-\infty,-8[\, \cup\, ]2,+\infty[ \end{cases} \quad \text{se} \quad \boxed{x \in ]-\infty,-8[\, \cup\, ]2,+\infty[}$$

Dunque se $x \in ]-\infty,-8[\, \cup\, ]2,+\infty[$ la serie converge assolutamente, mentre se $x \in ]-8,2[ \setminus \{0,-6\}$ allora la serie non converge

2. Calcolare, al variare di $\alpha > 0$, il limite
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x^2) - (\sin(x))^2}{x^\alpha + \arctan(x^5)}.$$

$$\operatorname{sen} y = y - \frac{y^3}{3} + o(y^4) \quad y \to 0 \implies$$
$$\implies \operatorname{sen}(x^2) = x^2 + o(x^5) \quad x \to 0$$
$$(\operatorname{sen} x)^2 = \left[x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right]^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^5), \quad x \to 0$$

$$\operatorname{sen}(x^2) - (\operatorname{sen} x)^2 = \frac{x^4}{3} + o(x^5), \quad x \to 0$$
$$\operatorname{arctg}(y) = y + o(y)$$
$$x^\alpha + \operatorname{arctg}(x^5) = x^\alpha + o(x^\alpha) + x^5 + o(x^5), \quad x \to 0 \quad \forall \alpha > 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(x^2) - (\operatorname{sen} x)^2}{x^\alpha + \operatorname{arctg}(x^5)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{x^4}{3} + o(x^5)}{x^\alpha + o(x^\alpha) + x^5 + o(x^5)} = (*)$$

se $\alpha < 4$ allora $(*) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{x^4}{3}+o(x^5)}{x^\alpha + o(x^\alpha)} = \lim_{x\to 0^+} x^{4-\alpha} \cdot \frac{\frac{1}{3}+o(x)}{1+o(1)} = 0$

se $\alpha = 4$ allora $(*) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{x^4}{3}+o(x^5)}{x^4+o(x^4)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{3}+o(x)}{1+o(1)} = \frac{1}{3}$

se $4<\alpha<5$ allora $(*) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{x^4}{3}+o(x^5)}{x^\alpha+o(x^\alpha)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^{\alpha-4}} \frac{\frac{1}{3}+o(x)}{1+o(1)} = +\infty$

se $\alpha=5$ allora $(*) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{x^4}{3}+o(x^5)}{2x^5+o(x^5)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} \frac{\frac{1}{3}+o(x)}{2+o(1)} = +\infty$

se $5<\alpha$ allora $(*)$ $\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{x^4}{3}+o(x^5)}{x^5+o(x^5)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} \frac{\frac{1}{3}+o(x)}{1+o(1)} = +\infty$

3. Rappresentare graficamente la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{2x}{|1-x^2|}\right), & x \neq \pm 1, \\ -\frac{\pi}{2}, & x = -1, \\ \frac{\pi}{2}, & x = 1. \end{cases}$$

Sono richiesti lo studio del segno di $f$, dei limiti a $\pm\infty$, degli eventuali asintoti, della monotonia di $f$ e la determinazione di tutti i punti in cui $f$ è derivabile. Non è richiesto lo studio della concavità.

**Facoltativo:** Rappresentare graficamente la funzione $x \mapsto \arctan(x) - \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$.

La funzione è definita $\forall x \in \mathbb{R}$ ed è continua $\forall x \neq \pm 1$

Inoltre $\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{\pi}{2}$ $\lim_{x\to -1} f(x) = -\frac{\pi}{2}$ dunque $f$ è continua $\forall x \in \mathbb{R}$

Inoltre la funzione è dispari in quanto $f(-x) = -f(x)$ dunque la studio solo per $x>0$

Il $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \operatorname{arctg}(0^+) = 0^+$ (dunque $y=0$ asintoto orizzontale)

Il segno: $f(x)>0$ $\forall x>0$, $f(x)<0$ $\forall x<0$, $f(0)=0$

La funzione $f$ è derivabile $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$

$x \in [0,1]$ $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$ da cui segue

$$f'(x) = \frac{1}{1+\frac{4x^2}{(1-x^2)^2}} \cdot \frac{2(1-x^2)-2x(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{2(1+x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{1+x^2}$$

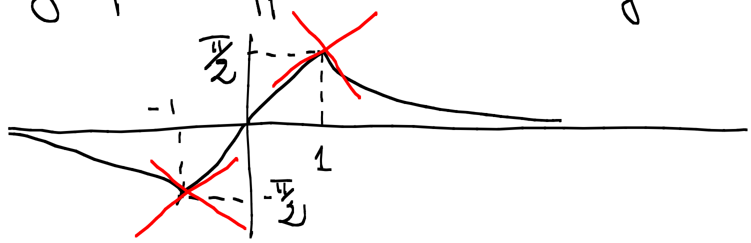
e dunque $f'>0$ $\forall x \in [0,1]$ e si ha $\lim_{x\to 1^-} f'(x) = 1 = f'(1^-)$

Quando $x>1$ $f(x)=\arctg\frac{2x}{x^2-1}$ da cui segue

$$f'(x)=\frac{1}{1+\frac{4x^2}{(1-x^2)^2}}\cdot\frac{2(x^2-1)-2x\cdot 2x}{(x^2-1)^2}=\frac{-2\cancel{(x^2+1)}}{(x^2+1)^{\cancel{2}}}=-\frac{2}{1+x^2}$$

e dunque $f'<0$ $\forall x>1$ e si ha $\lim_{x\to 1^+} f'(x)=-1$

Quindi nel punto $x=1$ non esiste la derivata di $f$
Analogamente nel punto $x=-1$ " " " " " "
Il punto $x=1$ è punto di max relativo, ed essendo $f(0)=0=\lim_{x\to+\infty} f(x)$, $x=1$ è max assoluto
(non esistono punti stazionari, ovvero t.c. $f'(x_0)=0$!)
Un grafico approssimativo è il seguente




Facoltativo: Rappresentare graficamente
$$f(x)=\arctg x-\frac{1}{2}\arctg\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$$

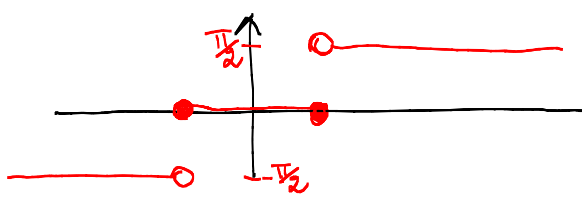
$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\frac{\pi}{2}+0$ $\qquad \lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{\pi}{2}$

$f$ non è definita nei punti $x=\pm 1$; $\nexists \lim_{x\to\pm1} f(x)$ infatti,
$\lim_{x\to-1^+} f(x)=-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=0=\lim_{x\to1^-} f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}$
mentre
$\lim_{x\to-1^-} f(x)=-\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}$ $\qquad \lim_{x\to1^+} f(x)=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$

Infine $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{2}\,\frac{1}{1+\frac{4x^2}{(1-x^2)^2}}\cdot\frac{2(1-x^2)-2x(-2x)}{(1-x^2)^2}$

$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{2}\,\frac{2(1+x^2)}{(1+x^2)^2}=0$ $\quad\forall x\neq\pm1$

Dunque il grafico è come segue



4. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere, motivando le risposte:

(a) se la serie $\sum_n a_n$ converge allora converge anche la serie $\sum_n \frac{1}{1+a_n}$;

(b) se la serie $\sum_n a_n$ converge allora converge anche la serie $\sum_n (1-\cos(a_n))$.

**Facoltativo:** Sia $f:[0,1]\to[0,1]$ una funzione continua. Dimostrare che esiste $\overline{x}\in[0,1]$ tale che $f(\overline{x})-\overline{x}=0$. (Il punto $\overline{x}$ è detto *punto fisso* di $f$.)

a) FALSO: se $\sum_n a_n$ converge allora $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

allora $\frac{1}{1+a_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ e dunque il Termine generale

della serie $\sum_n \frac{1}{1+a_n}$ non tende a zero, dunque

la serie $\sum_n 1/_{1+a_n}$ non converge

b) Distinguiamo due casi

$a_n \geq 0$ e allora l'implicazione è vera in quanto

se $\sum_n a_n$ converge e $a_n \geq 0$ allora $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

ed inoltre $1-\cos a_n = \frac{a_n^2}{4} + o(a_n^3)$, ovvero

$[1-\cos a_n] \sim \frac{a_n^2}{4}$ per $n\to+\infty$ e dunque

$\sum_n a_n$ converge $\underset{(a_n\geq 0)}{\Leftrightarrow}$ $\sum_n |a_n|$ converge $\Rightarrow \sum_n \frac{a_n^2}{4}$ converge $\Rightarrow \sum_n (1-\cos(a_n))$ converge

$a_n$ a termini di segno alterno: in questo caso

prese $a_n = (-1)^n \cdot 1/_{n^{1/3}}$ si ha che $\sum_n a_n$ converge

Però $1-\cos(a_n) = \frac{1}{n^{2/3}} + o\left(\frac{1}{n^{2/3}}\right)$, e si ha che

$\sum_n \left(1/_n\right)^{2/3}$ NON CONVERGE !

Facoltativo:

$f:[0,1]\to[0,1]$ continua. In particolare

$f(0)\geq 0$ mentre $f(1)\leq 1$

Ne segue che la funzione $g(x) = f(x)-x$ è t.c.

$g(0)\geq 0$ e $g(1)\leq 0$

Supponendo che $g(0)\neq 0$ e $g(1)\neq 0$ si ha che

$g(0)\cdot g(1) < 0$

$g:[0,1]\to\mathbb{R}$ continua

(Teorema di Bolzano - di esistenza degli zeri)

$\Rightarrow$ $\exists\, \overline{x}\in\,]0,1[\ \ g(\overline{x}) = f(\overline{x})-\overline{x} = 0$.