SERIE

1) Calcolare:

a) $\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n$; b) $\sum_{n=4}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot\frac{1}{n!}$; c) $\sum_{n=6}^{+\infty}\frac{5}{(n-1)(n-2)}$; d) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(3^{\frac{1}{2n-1}}-3^{\frac{1}{2n+1}}\right)$

2) Discutere la convergenza delle seguenti serie:

a) $\sum_n\left(\frac{4n+1}{3n+2}\right)^n$; b) $\sum_n\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n}\right)$; c) $\sum_n\left(\frac{3n+2}{4n+1}\right)^n$; d) $\sum_n\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}\right)$; e) $\sum_n\left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n-1\right)$;

f) $\sum_n\left(\frac{n}{1+n\sqrt{1+n^3}}\right)$; g) $\sum_n\log\left(\frac{2+n^2}{1+n^2}\right)$; h) $\sum_n\left(\frac{e^{\frac{-1}{n}}-\cos\frac{1}{n}+\frac{1}{n}}{\operatorname{sen}\frac{1}{\sqrt{n}}}\right)$; i) $\sum_n\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$; l) $\sum_n\frac{(2n)!}{5^n\cdot(n!)^2}$;

m) $\sum_n\cos\left(n\frac{\pi}{6}\right)\cdot\frac{1}{n^2}$; n) $\sum_n\frac{\operatorname{sen}(n)-2\cos(2n)}{2^n}$; o) $\sum_n\frac{(-1)^n}{n-\sqrt{n}}$; p) $\sum_n\frac{(-1)^n}{n^2-n\cdot\operatorname{sen}^2(n)}$;

q) $\sum_n(-1)^n\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$; r) $\sum_n\left(\frac{2n+\cos(n)}{\sqrt[3]{n^3+2n^2+8}}\right)^{\frac{n^2+2n}{3n+\operatorname{arctg}(n)}}$; s) $\sum_n\frac{\cos(n\pi)}{e^n-n^5}$; t) $\sum_n\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$;

u) $\sum_n\frac{7^n\operatorname{sen}(n)}{9^n+1}$; v) $\sum_n\left(5n^2\log\frac{n^2+2}{n^2+1}\right)^n$; w) $\sum_n(-1)^n\frac{4^n}{(n-4)!}$; z) $\sum_n\frac{\cos(2n)+(-1)^n n^3}{n^5+1}$

3) Per quali valori di q (q reale positivo) converge la serie $\sum_n\frac{q^{n+\sin(n)}\cdot\sin(n)}{\sqrt{2+\sin(n)}}$?

4) Se $\alpha<0$, la serie $\sum_n n^{-3\alpha}\cdot\sin\left(n^{4\alpha}\right)$: (A) diverge per ogni $\alpha<0$; (B) converge se $\alpha>-1$; (C) converge se $\alpha<-1/4$; (D) converge se $\alpha<-1$.

5) Per quali valori di α (α reale) converge la serie $\sum_n\frac{2^{n\alpha}}{4^{(\alpha-2)n}}$?
(A) per ogni $\alpha>4$; (B) per ogni $\alpha>1$; (C) per ogni $\alpha<1$; (D) per ogni $\alpha<-2$.

6) Per quali valori di α (α reale) converge la serie $\sum_n\left[n\operatorname{sen}\left(n^\alpha\right)+(2+\alpha)^{2n}\right]$?
(A) $\alpha<-2$; (B) $|\alpha+2|<1$; (C) $-3<\alpha<-2$; (D) $-3<\alpha<-2$ o $\alpha>-1$.

7) La serie $\sum_n\left(n^{\alpha-4}+|\alpha-1|^{-n}\right)$ è convergente se: (A) $3<\alpha$; (B) $\alpha<0$ o $2<\alpha<3$; (C) $1<\alpha<2$; (D) $1<\alpha$

8) Dato il parametro $q > 0$, per ogni $n \geq 1$ sia $a_n = \sum_{k=1}^{n} q^k$. a) Calcolare esplicitamente a_n in funzione di q e determinare $\lim_{n\to+\infty} a_n$ .b) Discutere al variare di $q > 0$ la convergenza della serie $\sum_n (q \cdot a_n)^n$.

9) Studiare il carattere delle seguenti serie al variare del parametro α:

a) $\sum_n \frac{(-1)^n \cdot n + \sqrt{n}}{n^\alpha}$; b) $\sum_n (-1)^n \cdot n^\alpha \cdot \left(1 - e^{\frac{1}{n}}\right)$; c) $\sum_n \frac{(-1)^n \cdot \log(n)}{n^\alpha}$; d) $\sum_n (-1)^n (\tan\alpha)^{2n}$

10) Stabilire per quali valori di x la seguente serie converge: $\sum_n \frac{(6-2x)^n}{2^n \cdot (x-1)^{2n}}$

11) a) Calcolare $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(1+x^2)}{\log x}$. b) Posto $f(x) = \frac{\log(1+x^2)}{x \cdot \log x}$ e $a_n = f(n)$, determinare i valori di α per i quali risulta convergente la serie $\sum_n n^\alpha \cdot a_n$.

12) La serie $\sum_n \frac{2n^\alpha\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)}{n^4+2}$

A) diverge per $\alpha > 6$; B) converge per $\alpha \leq 5$; C) diverge se $5 \leq \alpha < 6$; D) converge se $\alpha < 5$

13) Determinare per quali valori di $\alpha \in R$ converge la serie $\sum_n \left|\operatorname{sen}\left(\frac{2}{n}\right) + e^{-\frac{1}{n}} \cdot \log\left(\frac{n-2}{n}\right)\right|^\alpha$

14) Determinare per quali valori di x converge la serie $\sum_n \left(\frac{x+3}{x+4}\right)^n$ e calcolarne la somma.

<u>RISULTATI</u>:

1) a) 1/12 ; b) $e^{1/2} - 79/48$; c) 5/4 ; d) 2; **2)** a) diverge; b) diverge ; c) converge; d) converge ; e) diverge ; f) conv. ; g) conv. ; h) conv. ; i) conv. ; l) conv. ; m) conv. ; n) conv. ; o) conv. ; p) conv. ; q) conv. ; r) div. ; s) conv. ; t) div. ; u) conv.; v) div.; w) conv. ; z) conv. ; **3)** $q < 1$; **4)** (D) ; **5)** (A) ; **6)** (C) ; **7)** (B) ; **8)** b) se $0 < q < \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ converge, se $q > \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ diverge; **9)** a) converge se $\alpha > 3/2$; b) converge assolutamente se $\alpha < 0$, converge semplicemente se $0 \leq \alpha < 1$; c) converge assolutamente per $\alpha > 1$, converge semplicemente per $0 < \alpha \leq 1$; d) converge se $-\frac{\pi}{4} + k\pi < \alpha < \frac{\pi}{4} + k\pi$; **10)** converge per $x < -1$ o $x > 2$; **11)** a) 2 ; b) $\alpha < 0$; **12)** D ; **13)** $\alpha > 1/3$ **; 14)** $x \in \left]-\infty, \frac{-7}{2}\right[$.