SUCCESSIONI

1) Stabilire quali fra le seguenti formule definiscono delle successioni:
a) $a_n = n + 20/n$; b) $a_n = \sqrt{sen(n)}$; c) $a_n = tg(\pi\cos(n\pi/6))$; d) $a_n = 1/(n^2 - 20\cos n)$

2) Se la successione a_n è strettamente crescente, quale delle seguenti affermazioni è falsa?
(A) $a_n \to +\infty$; (B) a_n non ha massimo; (C) a_n è limitata inferiormente; (D) a_n ha solo estratte monotone

3) Se $-5 \le a_n \le 3$ per ogni n, allora:
(A) $a_n \cdot a_{n+1} \le 25$; (B) $-5 \le |a_n| \le 3$; (C) $\inf a_n = -5$; (D) $\max a_n = 3$

4) Se la successione a_n non è debolmente crescente, allora: (A) ha limite $-\infty$. ; (B) è monotona decrescente; (C) non può essere monotona; (D) esiste almeno un n per cui $a_n > a_{n+1}$.

5) Calcolare $\lim_{n\to+\infty}\left(\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)^n$, usando anche la disuguaglianza di Bernouilli.

6) Calcolare i seguenti limiti:

a) $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+2}{3-n}-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3(n+1)}\right)$; b) $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{n^3}-2\sqrt{n^5}}{1+3\sqrt[3]{n^7}}\right)$; c) $\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n^3}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{n-2}}-\frac{1}{\sqrt{n+3}}\right)$;

d) $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{(-1)^n n-2}{3n-2}\right)$; e) $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{(-1)^n n-2}{n^2-3}\right)$; f) $\lim_{n\to+\infty}\frac{n!+(n+1)!}{n!-(n+2)!}$; g) $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{sen\frac{1}{n}}{1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}}\right)$;

h) $\lim_{n\to+\infty}\frac{2^n+4^n}{3^n}$; i) $\lim_{n\to+\infty}\frac{2^n}{n}$; j) $\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt[3]{\frac{n^2+n\log n}{n^2}}-1\right)\cdot\frac{15n^2}{n-4}$; k) $\lim_{n\to+\infty}\frac{(2n)!}{2n!}$; l) $\lim_{n\to+\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}$;

m) $\lim_{n\to+\infty}\binom{3n}{n}$; n) $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{2^n+1}$; o) $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{2^n+n}$; p) $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n}$; q) $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n^2-2\cos n}$;

r) $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2^n}-\frac{n}{7^n}}$; s) $\lim_{n\to+\infty}\frac{\binom{2n}{3}}{\binom{n}{3}}$; t) $\lim_{n\to+\infty}e^{n^2(1-\cos\frac{1}{n})}$; u) $\lim_{n\to+\infty}\left(\cos\frac{\pi}{n}\right)^{n^2}$; v) $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^{\frac{2}{3}}\cdot sen(n!)}{n+1}$;

y) $\lim_{n\to+\infty}\left(sen\frac{1}{n}\right)^{sen\frac{1}{n}}$; w) $\lim_{n\to+\infty}\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{sen^2\frac{1}{n}}$; z) $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{(n+1)^{n+2}}{(n+2)^{n+1}}-\frac{n}{3}\right)\cdot sen\frac{1}{n}$.

7) Provare che $\lim_{n\to+\infty}(\sqrt[n]{n}-1)^n = 0$

8) Provare che $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = e$ (usare la disuguaglianza di Stirling)

9) Provare che $e^{n(\sqrt[n]{n}-1)} \ge n$ e calcolare $\lim_{n\to+\infty}(n(\sqrt[n]{n}-1))$

10) Il limite $\lim_{n\to+\infty}\frac{n(\sqrt[n]{n^3}-1)}{(\sqrt[n]{n^4}+1)\log n}$ vale: (A) 3/4 ; (B) 0 ; (C) 3/2 ; (D) $+\infty$

11) Il limite $\lim_{n\to+\infty}\frac{(3n)^{5n}-(5n)^{3n}}{n^8}$ vale: (A) 3/5 ; (B) -5/3 ; (C) - ∞ ; (D) + ∞

12) Il limite $\lim_{n\to+\infty} n\left(\sqrt[3]{1-\frac{2}{n}}-\sqrt[3]{1-\frac{3}{n}}\right)$ vale: (A) 1/3 ; (B) 1 ; (C) – 2/3 ; (D) + ∞

13) Il limite $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2\cdot sen\left(\frac{3}{n}\right)}{\sqrt{n^4}-\sqrt{n^4-5n^3}}$ vale: (A) 3/5 ; (B) 6/5 ; (C) 0 ; (D) + ∞

14) Il limite $\lim_{n\to+\infty}\frac{(2n)^n-n^{2n}\cdot 2^{-2n}}{(2e)^n-e^{2n}}$ vale: (A) 0; (B) + ∞ ; (C) - ∞ ; (D) nessuna delle precedenti

15) Data la successione $a_n = \frac{(3n)^n-n^{3n}\cdot 3^{-3n}}{e^{3n}-3^n\cdot e^n}$, quale fra le seguenti affermazioni è vera?

(A) $\lim_{n\to+\infty} a_n=+\infty$; (B) $\lim_{n\to+\infty} a_n=-\infty$; (C) $\lim_{n\to+\infty} a_n=0$; (D) nessuna delle precedenti è vera.

16) Calcolare il valore del seguente limite al variare di α $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^n-n^{\alpha n}}{2n^{4\alpha}-n^3}$

17) Date due successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ tali che, quando n → + ∞ , si ha $n^2 a_n \to 0$, $n^3 b_n \to 0$, quale fra le seguenti affermazioni è falsa?

(A) $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=1$; (B) $\lim_{n\to+\infty}(a_n+b_n)=0$; (C) $\lim_{n\to+\infty} n(a_n-b_n)=0$; (D) $\lim_{n\to+\infty} n^4 a_n\cdot b_n=0$

18) Date due successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ tali che, quando n → + ∞ , si ha $n^4 a_n \to 1$, $n^3 b_n \to 1$, quale fra le seguenti affermazioni è falsa?

(A) $\lim_{n\to+\infty} n^3(a_n+b_n)=1$; (B) $\lim_{n\to+\infty} n^4(a_n-b_n)=0$; (C) $\lim_{n\to+\infty} n^6 a_n\cdot b_n=0$; (D) $\lim_{n\to+\infty} n\frac{a_n}{b_n}=1$

19) Data la successione $a_n = (n-2)!-\frac{(n-1)!}{n+1}$, n ≥ 3 dimostrare che $\{a_n\}$ è monotona strettamente crescente e calcolare $\lim_{n\to+\infty}\frac{(n-1)!}{3n^2\cdot a_n}$.

20) Data la successione $a_n = \frac{(n+2)^2}{n^n}$, n ≥ 1 dimostrare che $\{a_n\}$ è monotona strettamente decrescente e calcolare $\lim_{n\to+\infty} a_n\cdot(n-2)!$

<u>RISULTATI</u>:

2) (A) ; 3) (A) ; 4) (D) ; 5) 1 ; 6) a) – 1 ; b) - ∞ ; c) 5/2 ; d) ? ; e) 0 ; f) 0 ; g) 2 ; h) + ∞; i) + ∞ ; j) +∞ ; k) + ∞ ; l) + ∞ ; m) + ∞ n) 2 ; o) 2 ; p) 3 ; q) 1 ; r) 1/2 ; s) 8 ; t) $\sqrt{e}$; u) $e^{\frac{-\pi^2}{2}}$; v) 0 ; y) 1 ; w) 1 ; z) 1/e – 1/3 ; 10) (C) ; 11) (D) ; 12) (A) ; 13) (B) 14) (B) ; 15) (B) ; 16) - ∞ se α < 3/4 e se α > 1 , + ∞ se 3/4 ≤ α < 1, 0 se α = 1; 17) (A) ; 18) (B) ; 19) 1/6 ; 20) 0.