

INFINITESIMI E CALCOLO DI LIMITI

1) Calcolare: a) $(x^2 + o(x^2))^3$; b) $\frac{o(x^2)}{x}$; c) $o(x^3 + o(x^4))$; d) $o(x + x^3 - o(x^4))^2$

2) Sviluppare fino all'ordine indicato le seguenti funzioni:

a) $f(x) = x \cdot \sin x \cdot \log(1+x)$ fino al 5° ordine ; b) $f(x) = e^{x^2} - 1 - \sin^2 x$ fino al 4° ordine ;

c) $f(x) = \log(1+x^3) + \sin x - x$ fino al 3° ordine.

3) Calcolare ordine e parte principale per $x \rightarrow 0$ di:

a) $f(x) = 1 - \cos x$; b) $f(x) = x - \sin x$; c) $f(x) = \cos x - 1 + \tan x$; d) $f(x) = 2x^2 \sin^2 x$; e) $f(x) = \sin(\cos x - 1)$;

f) $f(x) = (1+x)^a - 1$; g) $f(x) = \sqrt[3]{x+x^2} - \sqrt[3]{x} + x^2$; h) $f(x) = \frac{1 - \cos(x+x^2)}{\sin^2 x}$; i) $f(x) = \sin(2x^2) \cdot (\sqrt{1+3x} - 1)$;

l) $f(x) = (1 - \cos^2 x)^2 - (\log(1+x^2))^2$; calcolare inoltre $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \cdot f(x)$

4) Calcolare ordine e parte principale per $x \rightarrow \pi/2$ di: $f(x) = \sin(\cos x)$

5) Calcolare ordine e parte principale per $x \rightarrow +\infty$ di: a) $f(x) = \frac{2x^2 + 3}{x^4 - 1}$; b) $f(x) = \sqrt{\frac{x-3}{x}} - 1$; c) $f(x) = \arctan \frac{3}{x^2}$

6) Date $f(x) = (x - \sin x)^2$ e $g(x) = x - \log(1+x)$, calcolare l'ordine di infinitesimo di $f(x)/g(x)$.

7) Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\sin(x-1)}{x^2-1} \cdot \frac{e^{x^2-1}-1}{x-1}$; b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 - \cos(x+1)}{x+1} \cdot \frac{3(x-1)}{e^{x^2-1}-1}$; c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \sin\left(\log \frac{x+1}{x+2}\right)$; d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2}-1}{x \sin x}$;

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x \log(1+x)}{1 - \cos x} \right)^{3-x}$; f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \sin x}{1 + \cos x - 2 \cos^2 x}$; g) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 1}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}$; h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \left(1 - e^{\frac{x}{1+x^2}}\right)$;

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot \left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{1+x}}\right)$; l) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1 - \sin^2 x}{x - \sin x}$; m) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{1 - \sin(\pi x)}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}$; n) $\lim_{x \rightarrow \pi} \left(\frac{1}{\sin x} + (\tan x)^{-1}\right)$;

o) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan^3 x} - 1}{x \cdot (\cos x - e^{x^2})}$; p) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - \sin^2 x}{(1 + 2x^2)^{-1} - \cos 2x}$; q) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} \cos 2x + \log(1-3x) - (1-x^2)^2}{x - \sin x}$;

r) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \sin x}{6 \sin x \cdot (1 + 3x^2)^{-1} - 6x + 19x^3}$; s) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2 \cos 3x^2 - \sin x^3 + \log(1+x^3)}{e^{2x^4} - 1}$; t) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x \arctan x) + 1 - e^{x^2}}{\sqrt{1+2x^4} - 1}$

8) Determinare il valore del parametro α in modo che il seguente limite sia un numero finito e trovare il valore del limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{-2} \cdot (e^{\alpha x} - e^x - x)$$

9) Determinare i valori dei parametri a e b in modo che il $\lim_{x \rightarrow 0} (x^{-3} \cdot \sin 3x + ax^{-2} + b)$ valga 0.

10) Calcolare, al variare del parametro reale α , i seguenti limiti:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x^\alpha}$; b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x}{e^x - 1} + \frac{x^\alpha}{x - \sin x} \right)$; c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{|x|^\alpha + x^2}$; d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \sin x}{(1-x)^{-1} \cos x - e^x - \frac{x^\alpha}{3}}$

e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x)^2 - \sin^2 x - \frac{x^\alpha}{3}}{(1+x^2) \log(1+x^2) - e^{x^2} + 1}$; f) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos(x^2) - (1 - \cos x)^2 - \frac{x^\alpha}{4}}{(1+x^2)^{-1} \log(1+x^2) - \sin(x^2) + 3 \frac{x^\alpha}{2}}$

RISULTATI:

3) a) ordine 2, parte principale $x^2/2$; b) ord. 3, p.p. $x^3/6$; c) ord. 1, p. p. x ; d) ord. 4 , p.p. $2x^4$; e) ord. 2, p.p. $-x^2/2$;

f) ord. 1, p.p. ax ; g) ord. $4/3$, p.p. $\frac{1}{3}x^{\frac{4}{3}}$; h) ord. 0 , p. p. $1/2$; i) ord.3 , p.p. $3x^3$; l) ord. 6 , p.p. $x^6/3$; lim. = 0

se $\alpha > -6$, lim. = $1/3$ se $\alpha = -6$, lim. = $+\infty$ se $\alpha < -6$; 4) ord. 1, p.p. $-(x - \pi/2)$; 5)) ord. 2, p.p. $2/x^2$; b) ord. 1, p.p. $-3/(2x)$; c) ord. 2 , p.p. $3/x^2$; 6) ord. 4, p.p. $x^4/18$; 7) a) 2 ; b) $3/2$; c) -1 ; d) 1 ; e) 8 ; f) $2/3$; g) $-1/2$; h) -1 ; i) 1 ; l) 0 ; m) $\pi^2/2$; n) 0 ; o) $-2/3$; p) $1/10$; q) -63 ; r) $+\infty$; s) $9/2$; t) $= -4/3$; 8) $\alpha = 2$ e lim. = $3/2$; 9) a = - 3 e b = $9/2$; 10) a) $1/6$ se $\alpha = 3$, 0 se $\alpha < 3$, $+\infty$ se $\alpha > 3$; b) 7 se $\alpha = 3$, 1 se $\alpha > 3$, $+\infty$ se $\alpha < 3$; c) $1/4$ se $\alpha = 2$, $1/2$ se $\alpha > 2$, 0 se $\alpha < 2$; d) $+\infty$ se $\alpha = 3$, 0 se $\alpha < 3$, $1/2$ se $\alpha > 3$; e) $19/30$ se $\alpha = 4$, $+\infty$ se $\alpha < 4$, $-\infty$ se $\alpha > 4$; f) $1/48$ se $\alpha = 4$, $-1/6$ se $\alpha \neq 4$.