<u>CENNI DI TOPOLOGIA - LIMITI E CONTINUITA'</u>

1) Determinare frontiera, interno, chiusura, insieme dei punti di accumulazione, insieme dei punti isolati dei seguenti insiemi:

a) A = $]0,5[$; b) B = $Q \cap [0,1[$; c) C = $\left\{3, \frac{1}{2}, 3-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 3-\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, 3-\frac{1}{4}, ..., \frac{1}{n}, 3-\frac{1}{n}, ...\right\}$;

d) D = $]0,1[\cup [3,7[$; e) E = $]1,2[\cup]2,4] \cup \{5\}$; f) F = $\left\{\frac{1}{n^2} : n \geq 1\right\}$; g) G = $]-\infty,2[\cup \{3\} \cup]4,+\infty[$.

2) Determinare i punti di accumulazione dei seguenti insiemi numerici:

a) A = $\left\{\frac{9n^2-1}{4n^2} : n \in N, n \geq 1\right\}$; b) B = $\left\{\frac{7}{2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{(-1)^n}{n} : n \in N \setminus \{0\}\right\}$; c) C = $\{-4\} \cup [2,5)$;

d) D = $\left\{(-1)^n - \frac{1}{n+1} : n \in N\right\}$; e) E = $\left\{\frac{1}{n}+2+\frac{1}{n^2} : n \in N \setminus \{0\}\right\}$.

3) Verificare, usando la definizione, l'esattezza dei seguenti limiti: a) $\lim_{x \to 1} \frac{1}{(1-x)^2} = +\infty$;

b) $\lim_{x \to -\infty} \sqrt[3]{x-1} = -\infty$; c) $\lim_{x \to 0^-} \frac{x+1}{x} = -\infty$; d) $\lim_{x \to 2} \frac{2x^2-9x+10}{x-2} = 1$; e) $\lim_{x \to \infty} \frac{2x+3}{1+x} = 2$

4) Stabilire se esistono i seguenti limiti: a) $\lim_{x \to 3} \frac{e^x-1}{x^2-5x+6}$; b) $\lim_{x \to 0} \arctan\frac{1}{x}$; c) $\lim_{x \to 1} \frac{2|x-1|}{x^2-x^3}$.

5) Determinare il valore del parametro a $\in \Re$ per il quale esiste $\lim_{x \to -2} f(x)$, dove f(x) = $\begin{cases} e^{-x-2} & x \leq -2 \\ \sqrt{x+a} & x > -2 \end{cases}$

6) Dimostrare che i polinomi sono funzioni continue.
7) Studiare la continuità della funzione f(x) = 1/x in un punto $x_0 > 0$.
8) Studiare la continuità delle seguenti funzioni:

a) f(x) = $\frac{2x-3}{|x|+2}$; b) f(x) = $\begin{cases} 2senx & x < 0 \\ \log(x^2+e), & x \geq 0 \end{cases}$; c) f(x) = $\begin{cases} \sqrt{2-x} & , \ x < 1 \\ 2 & , \ x = 1 \\ \frac{1}{x} & , \ x > 1 \end{cases}$

9) Determinare il valore dei parametri a , b $\in \Re$ per i quali le seguenti funzioni risultano continue $\forall x \in \Re$:

a) f(x) = $\begin{cases} arctg\frac{1}{x} & x \in]0,1[\\ ax+b & x \notin]0,1[\end{cases}$; b) f(x) = $\begin{cases} a\log(1+x) & x \in [0,e-1] \\ x^2+b & x \notin [0,e-1] \end{cases}$; c) f(x) = $\begin{cases} 2^{2x}-a^2-4 & x < 2 \\ a^{x-1} & x \geq 2 \end{cases}$

10) Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

a) f: R \{0}→ R è continua, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, f(- 1) > 0, f(1) < 0, allora f(x) si annulla almeno due volte.

b) la funzione f(x) = $\frac{3x}{e^x+2}$ non ha massimo perché il suo dominio non è un intervallo limitato e chiuso.

c) la funzione f(x) = $(x-2)^3 - 3x - 4$ assume in qualche punto dell'intervallo [1 , 3] il valore – 10.

d) se la funzione f(x), definita sull'intervallo [a , b], assume valori dello stesso segno negli estremi dell'intervallo, allora non esiste x $\in]a,b[$ in cui f(x) si annulla.

<u>RISULTATI</u>:

1) $\mathcal{F}$(A) = {0,5}, $\overset{o}{A} =]0,5[$, $\overline{A} = [0,5]$, D(A) = [0,5] , I(A) = Φ; $\mathcal{F}$(B) = $Q \cap [0,1]$, $\overset{o}{B} = \Phi$, $\overline{B} = Q \cap [0,1]$, D(B) = Φ, I(B) = B ;

$\mathcal{F}$(C) = C ∪ {0}, $\overset{o}{C} = \Phi$, $\overline{C}$ = C ∪ {0}, D(C) = {0,3}, I (C) = C\{3}; $\overset{o}{D} =]0,1[\cup]3,7[$, $\mathcal{F}$(D)={0,1,3,7}, $\overline{D} = [0,1] \cup [3,7]$, D(D) = $\overline{D}$, I(D) = Φ ; $\overset{o}{E} =]1,2[\cup]2,4[$, $\mathcal{F}$(E) = {1,2,4,5}, $\overline{E} = [1,2] \cup [2,4] \cup \{5\}$, D(E) = $[1,2] \cup [2,4]$, I(E) = {5}; $\overset{o}{F} = \Phi$, $\mathcal{F}$(F)

$=F\cup\{0\}$, $\overline{F} = \mathcal{F}(F)$, $D(F) = \{0\}$, $I(F) = F$; $\mathcal{F}(G) = \{2,3,4\}$, $D(G) = \left]-\infty,2\right]\cup\left[4,+\infty\right[$, $I(G) =\{3\}$; 2) a) 9/4 ; b) 7/2 ; c) ogni $x \in [2,5]$; d) -1 , 1 ; e) 2 ; 5) a = 3 ; 8) a) continua $\forall x\in \Re$; b) continua $\forall x\in \Re\setminus\{0\}$; c) continua $\forall x\in \Re\setminus\{1\}$; 9) a) $a = -\pi/4$, $b = \pi/2$; b) $a = (e - 1)^2$, $b = 0$; c) a = 3 ; 10) a) vera; b) falsa; c) vera, d) falsa.