NUMERI NATURALI E PRINCIPIO DI INDUZIONE:

1) Provare che

- $1\cdot 2+2\cdot 3+....+n\cdot(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

- $1 \ +2\cdot 2+3\cdot 2^2+.....+n\cdot 2^{n-1}=(n-1)\cdot 2^n+1$

- $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{4}+\dfrac{3}{8}+\dfrac{4}{16}+.....+\dfrac{n}{2^n}=2-\dfrac{n+2}{2^n}$

- $1\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{4}+....+\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{n}{n+1}$

2) Dimostrare per induzione la disuguaglianza di Bernouilli $(1+a)^n \geq 1+na$, $\forall\, a \geq -1$

3) Provare per induzione che. a) $\forall$ n, $3^n \geq \dfrac{n}{2}\cdot 2^n$; b) $\forall\, n \geq 2$, $3^n+4^n \leq 5^n$;

c) $\forall\, n \geq 6$, $n^n > 2^n\cdot n!$; d) $\forall\, n \geq 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2$; e) $\forall\, n \geq 1$ $n! \geq 2^{n-1}$;
f) $\forall$ n, $3^{2n}-2^n$ è multiplo di 7 ; g) $\forall\, n \geq 3$, $n^2 > 2n+1$; h) $\forall\, n \geq 5$, $2^n > n^2$;

i) $\forall\, n \geq 1$, n^3+5n è divisibile per 6 ; l) $\forall\, n \geq 1$ e $\forall\, a \in (0\,;1)$, $(1-a)^n < \dfrac{1}{1+na}$.

4) Provare che $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k=\begin{cases} n+1, & q=1\\ \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}, & q\neq 1\end{cases}$, $\forall n \geq 0$

5) Provare che $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \leq \left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ $\forall\, n \geq 1$

6) Siano date le seguenti uguaglianze:

a) 1 + 1/2 = 2 – 1/2 , 1 + 1/2 + 1/4 = 2 – 1/4 , 1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 = 2 – 1/8, etc.

b) 1 – 1/2 = 1/2 , (1 – 1/2)(1 - 1/3) = 1/3 , (1 – 1/2)(1 – 1/3)(1 – 1/4) = 1/4 , etc…..

Trovare e dimostrare per induzione la legge generale che queste uguaglianze suggeriscono.