

INTEGRALI GENERALIZZATI

1) Sia $f: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(0) = 0$ e $f(x) \rightarrow -1$ per $x \rightarrow +\infty$. Allora:

(A) $\int_0^{+\infty} f = -\infty$; (B) $\int_0^{+\infty} f = -1$; (C) $\int_0^{+\infty} f = 0$; (D) non si può stabilire se f sia integrabile in senso generalizzato o no.

2) Studiare la convergenza dei seguenti integrali:

a) $\int_1^{+\infty} \frac{x}{1+x^6} dx$; b) $\int_0^1 \frac{t \cos t - \log(1+t)}{t^2} dt$; c) $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x^2} - x}{\sqrt{x}} dx$; d) $\int_0^1 \frac{1}{\log x} dx$;

e) $\int_0^2 \frac{1}{e^x - e} dx$; f) $\int_0^1 \left(\frac{e^x}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) dx$

3) Calcolare, se esistono, i seguenti integrali:

a) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^6} dx$; b) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{2x}}{(1+e^x)^3} dx$; c) $\int_0^{\pi^2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \cos \sqrt{x} dx$; d) $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} dx$;

e) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx$; f) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos^2 x \cdot (\tan^2 x + 2)} dx$;

4) Determinare $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che i seguenti integrali convergano:

a) $\int_0^{+\infty} \frac{(\log x)^3}{\sqrt{x} \cdot (x+2)^\alpha} dx$; b) $\int_0^1 \frac{x^\alpha}{\log(1+x^4)} dx$; c) $\int_0^{+\infty} \frac{\arctg x}{(x^2+1)^\alpha \cdot x^{3\alpha}} dx$; d) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{e^x - e^2} \cdot (x-2)^\alpha}$;

e) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \cdot \log^\alpha(x+2) dx$; f) $\int_1^{+\infty} \frac{1 + \log^2 x}{x^\alpha \cdot (1 + 5 \log^2 x + 6 \log^4 x)} dx$; g) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x \cdot (x^2 + x^{-2})^{\alpha/2}} dx$

5) Per α fissato, calcolare $\int_0^1 \frac{\arcsin x^\alpha}{x^{1-\alpha} \sqrt{1-x^{2\alpha}}} dx$

6) Posto $I_n = \int_{1/(4n)}^{1/n} \frac{\cos x}{2\sqrt{x}} dx$, calcolare $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

Stabilire inoltre per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (n^\alpha I_n)$.

7) Dopo aver trovato tutte le primitive della funzione $f(x) = x \cdot 2^{-x^2}$, posto $a_n = \int_{\sqrt{n}}^{\sqrt{2n}} x \cdot 2^{-x^2} dx$,

calcolare la somma della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

8) Calcolare, se esiste (motivando la risposta), l'integrale $\int_{-2}^1 (x^2 - 2x + 2 \log|1+x|) dx$

9) Sia $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 + x}$

a) determinare $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; b) determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge $\int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{x^\alpha} dx$.

10) Date le funzioni: a) $F(x) = \int_4^x \frac{e^t}{1 + \sqrt{t(10-t)}} dt$, b) $F(x) = \int_2^x \frac{e^t}{1 + \sqrt{t^2 - t}} dt$, c) $F(x) = \int_1^x \frac{\cos(t)}{\sqrt[3]{t+1}} dt$

stabilire quale è l'insieme di definizione D_F di ciascuna di esse. Per le funzioni a) e b) specificare in quale sottoinsieme di D_F la funzione F è positiva e in quale è negativa.

11) Determinare il comportamento per $x \rightarrow +\infty$ delle seguenti funzioni:

a) $F(x) = \int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t+2}} dt$; b) $F(x) = \int_0^x \frac{2t^2 + \log(t+1)}{t^2 + e^{-t}} dt$

12) Data la funzione $f(x) = \frac{3x^2 + 11}{x^3 + 4x + 3}$ sia $F(x)$ la sua funzione integrale, calcolata a partire da

$x_0 = 1$. Dopo aver dimostrato che $F(x) \rightarrow +\infty$ per $x \rightarrow +\infty$, calcolare $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{\log(x^2 + 1)}$.

13) Studiare la funzione $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ dove $f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt[3]{t}}, & t < 0 \\ \frac{1}{\sqrt{t}}, & t > 0 \end{cases}$.

14) Per ogni $x \in \mathbb{R}$ sia $F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{(1+t^2)(1+\arctan^2 t)} dt$

a) disegnare un grafico approssimativo di F , studiandone in particolare gli intervalli di monotonia e i limiti agli estremi del dominio.

b) determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ l'equazione $F(x) = k$ ha soluzione.

RISULTATI

1) (A); 2) a) converge; b) converge; c) converge; d) diverge; e) non esiste; f) converge; 3) a) 0; b) 3/8; c) -4; d) 6; e) non converge; f) $\sqrt{2}\pi$; 4) a) $\alpha > 1/2$; b) $\alpha > 3$; c) $1/5 < \alpha < 2/3$; d) $\alpha < 1/2$; e) $\alpha < 0$; f) $\alpha \geq 1$; g) $\alpha > 0$;

5) $\frac{\pi^2}{8\alpha}$; 6) 0; $\alpha < -1/2$; 7) $-\frac{2^{-x^2}}{2\log 2} + c$; $\frac{1}{3\log 2}$; 8) non esiste; 9) a) 1, b) $1 < \alpha < 3/2$; 10) a) $D_F = [0; 10]$;

$F(x) > 0$ per $4 < x \leq 10$, $F(x) = 0$ per $x = 4$, $F(x) < 0$ per $0 \leq x < 4$; b) $D_F = [1; +\infty)$, $F(x) > 0$ per $x > 2$, $F(x) = 0$ per $x = 2$, $F(x) < 0$ per $1 \leq x < 2$; c) $D_F = \mathbb{R}$; 11) a) F ha un asintoto orizzontale per $x \rightarrow +\infty$; b) F ha per $x \rightarrow +\infty$ un asintoto obliquo di $m = 2$; 12) 3/2; 14) una soluzione se $0 < k < 2\arctan(\pi/2)$.