FUNZIONE INTEGRALE E INTEGRALI DEFINITI

1) Calcolare, se esistono, i seguenti integrali definiti:

a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x^{\frac{2}{3}}}{1+x^{\frac{2}{3}}}dx$; b) $\displaystyle\int_{1}^{e} \frac{\log x}{\sqrt{x}}dx$; c) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{2+(x+1)\sqrt{x}}{2+x}dx$; d) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{1+4sen^2 x}dx$; e) $\displaystyle\int_{1}^{e} \frac{\log(1+2\log x)}{x}dx$

2) L'integrale $\displaystyle\int_{e^{1/e}}^{e^e} \frac{(\log\log x)^3}{x\log x}dx$ (A) vale 1/4 ; (B) vale 0 ; (C) vale 1/2 ; (D) vale (e – 1/e) .

3) L'integrale $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x \cdot senx dx$ vale : (A) $\frac{\pi}{2}-1$; (B) – 1 ; (C) 0 ; (D) 1

4) L'integrale $\displaystyle\int_{1}^{e} \frac{arctg(\log x)}{x}dx$ vale : (A) $\frac{\pi}{4}-\log\sqrt{2}$; (B) $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{e}$; (C) 2π ; (D) $\frac{arctg1}{e}$.

5) Calcolare $\displaystyle\int_{-1}^{1} \left|e^{-x}-2\right| dx$.

6) Dato λ > 0, studiare brevemente la funzione f_λ (x) = λx + 1/x, per x > 0.

Detto x_λ il punto di minimo di f_λ su R^+ , calcolare $\displaystyle\int_{1/2x_\lambda}^{2x_\lambda} f_\lambda(t)dt$.

7) Data la funzione f(x) = x^2 - 4|x| + 3 , studiarla e tracciarne il grafico.
Il grafico di f(x) e l'asse delle ascisse dividono il piano in varie parti, alcune delle quali di area finita; determinare l'area complessiva di queste ultime.

8) Calcolare F(x) = $\displaystyle\int_{0}^{x} f(t)dt$, dove f(t) = - $\displaystyle\frac{sen2t}{1+sen^2 t}$.

9) Calcolare la derivata prima delle seguenti funzioni:

a) F(x) = $\displaystyle\int_{senx}^{\cos x} \sqrt{1-t^2}\,dt$; b) F(x) = $\displaystyle\int_{2x}^{x^2} \frac{e^t}{t}dt$; c) F(x) = $\displaystyle\int_{x}^{x^2} \sqrt{te^t}\,dt$

10) Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di F(x) = $\displaystyle\int_{senx}^{\cos x} e^t dt$ nel suo punto di ascissa 0.

11) Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di F(x) = $\displaystyle\int_{2x}^{x^2} \frac{sent}{t}dt$ nel suo punto di ascissa 2.

12) Discutere continuità e derivabilità della funzione F(x) = $\displaystyle\int_{0}^{x} f(t)dt$, dove F(x) : [- 1 , 3] → R e

$$f(t) = \begin{cases} -1, & -1 \le t < 0 \\ -2t, & 0 \le t \le 1 \\ 2t-4, & 1 < t \le 2 \\ 1, & 2 < t < 3 \\ 1/2, & t = 3 \end{cases}$$

13) Data la funzione F(x) = $\int_{1}^{x} e^{t^2} \cdot (sent + 3)dt$, stabilire se è invertibile e, in caso affermativo, calcolare $(F^{-1})'(0)$.

14) Dopo aver verificato che la funzione F(x) = $\left(\int_{1}^{x} e^{2t-t^2} dt - 1\right)$ è invertibile, detta G(x) la sua inversa, scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di G(x) nel suo punto di ascissa – 1.

15) Determinare il minimo valore assunto dalla funzione f(x) = $\int_{0}^{x} (t^3 - 2t) \cdot e^{-t} dt$.

16) Determinare il numero delle soluzioni dell'equazione $2x - \frac{1}{2}\int_{0}^{x} e^{-t^2} dt = 1$.

17) Il limite $\lim_{x \to 0^+} \frac{\left(\int_{0}^{x} e^{-2t^2} dt\right) - x}{x^3}$ vale: (A) 1/6 ; (B) - 2/5 ; (C) – 2/3 ; (D) – ∞ .

18) Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\log x}\left(x - \int_{1}^{x} e^{\frac{1}{t}} dt\right)$; b) $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x}\int_{x}^{2x} \frac{sent}{t} dt$; c) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\int_{0}^{x} \frac{5 + 2t - sent}{1 + 3t^2}}{\log(3 + 2x)}$

19) Date le funzioni a) F(x) = $\int_{1}^{x} \frac{e^t}{t} dt$ e b) $\int_{2}^{x^2+1} sen(t^2) dt$ scrivere per ciascuna di esse il polinomio di Taylor di grado 3 per a) e di grado 2 per b) centrato in $x_0 = 1$ e disegnare un grafico qualitativo di F nell'intorno di $x_0 = 1$.

20) Data la funzione F(x) = $\int_{x}^{x+1} \frac{1}{t^2 + t + 1} dt$, $\forall x \in R$

a) disegnare un grafico approssimativo di F
b) determinare al variare di $k \in R$ il numero di soluzioni dell'equazione F(x) = k.

RISULTATI

1) a) $6\left(-\frac{2}{3} + \frac{1}{4}\pi\right)$; b) 4 - 2√e ; c) $-\frac{4}{3} + \log\frac{9}{2} + 2\sqrt{2}arct\frac{\sqrt{2}}{2}$; d) $\frac{\pi}{8}$; e) 3/2· log3 – 1 ; **2)** (B) ; **3)** (D) ; **4)** (A)
5) – 4 + 4log2 + e + 1/e ; **6)** 15/8+ log4 ; **7)** 16/3 ; **8)** F(x) = **-** log(1 + sen²x) ; **9)** a) - |senx| · senx - |cosx| · cosx ;
b) $\frac{1}{x}\left(2e^{x^2} - e^{2x}\right)$; c) $2x|x|\sqrt{e^{x^2}} - \sqrt{xe^x}$; **10)** y = - x + e – 1 ; **11)** y = (sen4)/2 · (x – 2) ;
12) F(x) continua in [-1 , 3], non derivabile in x = 0 e in x = 2 ; **13)** $\frac{1}{e(sen1 + 3)}$ **;** **14)** y = $\frac{1}{e}(x + 1) + 1$;
15) $4 - e^{\sqrt{2}}\left(10 - 6\sqrt{2}\right)$; **16)** una soluzione $\in]0,1[$; **17)** (C) ; **18)** a) – 1 ; b) 1 ; c) 2/3 ;
19) a) $P_3(x) = e(x - 1) + e/6\ (x - 1)^3$; b) $P_2(x) = (2sen4)(x - 1) + 1/2\ (2sen4 + 16cos4)(x - 1)^2$;
20) due sol. se $0 < k < 2\pi/3\sqrt{3}$., una sol. se $k = 2\pi/3\sqrt{3}$, zero sol. altrove.