TEOREMA DI DE L'HOSPITAL

A) Utilizzando il teorema di De L'Hospital, dimostrare che non è possibile determinare l'ordine di infinito della funzione $f(x) = \log(x)$ per $x \to +\infty$.

B) Calcolare i seguenti limiti, usando gli strumenti di calcolo più opportuni:

1) $\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos(x))^2}{x\cdot\log^3(1+x)}$; 2) $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}(x^2)\right)\cdot x^3$; 3) $\lim_{x\to 0^+}\frac{\log(\cot g(x))}{\log(2x^3)}$;

4) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} tg(2x)\cdot\log(sen(2x))$; 5) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1+\sqrt{4x^2-5x-1}}{2x+\sqrt[3]{x^3-x}}$; 6) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\cdot e^{-x}+x}{x+sen(x)cox(x)}$.

POLINOMI DI TAYLOR

1) Scrivere lo sviluppo di Taylor di ordine 3 centrato in $x_0 = 1$ per $f(x) = e^x$

2) Scrivere lo sviluppo di Taylor di ordine 4 centrato in $x_0 = \pi/4$ per $f(x) = senx$

3) Scrivere lo sviluppo di Taylor di ordine n centrato in $x_0 = 2$ per $f(x) = 1 + 2x - x^4/3 + x^5$

4) Uno sviluppo di Taylor della funzione $f(x) = \frac{\log(1+3x)}{2x+1}$ nel punto $x_0 = 0$ è : A) $3x - 3/2\, x^2 + o(x^2)$; B) nessuna delle altre risposte è vera ; C) $3x - 21/2\, x^2 + o(x^2)$; D) $3x + 3/2\, x^2 + o(x^2)$.

5) Se una funzione f(x) ha in $x_0 = 0$ un punto di minimo locale, allora un suo sviluppo di Taylor centrato in tale punto può essere: A) $f(x) = x + x^2 + o(x^2)$; B) $f(x) = 1 - 5x^2 + o(x^2)$; C) $f(x) = -3 + 2x^4 + o(x^4)$; D) $f(x) = 1 + 3x^3 + o(x^3)$

6) Studiare il comportamento locale della funzione $f(x) = 1 - (x-2)^2 + 1/4\cdot (x-2)^3 + o((x-2)^3)$ in un intorno del punto $x_0 = 2$, stabilendo in particolare se si tratta di un punto stazionario e in caso affermativo determinarne il tipo.

7) Sono date le funzioni $f(x) = ax + bx^2 + o(x^5)$ per $x \to 0$ e $g(x) = f(senx) - ax + 1/3\cdot(x^2 + x^3)$ con $a, b \in \mathfrak{R}$. Determinare i valori dei parametri a e b per i quali la funzione g(x) ammette in $x_0 = 0$ un punto di massimo locale o un punto di minimo locale o un punto di flesso

11) Approssimare il valore di $e^{\sqrt{2}}$ con un errore $< 10^{-3}$

12) Approssimare il valore di $\frac{1}{\sqrt{2}}$ con un errore $< 10^{-3}$

13) Approssimare il valore di $\sqrt{65}$ con un errore $< 10^{-4}$

14) Dopo aver calcolato il polinomio di Taylor P(x) di ordine 3 centrato in $x_0 = 0$ della funzione $f(x) = 2\cdot(1+x)^{\frac{1}{3}}$, calcolare il valore di P(1/8) e stimare l'errore commesso.

RISULTATI

De L'Hospital: 1) 1/4 ; **2)** $-\infty$; **3)** $-1/3$; **4)** 0 ; **5)** 1 ; **6)** 1;

Taylor: 1) $\frac{e}{6}\left(x^3+3x+2\right)+o((x-1)^2)$;

2) $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2-\frac{1}{6\sqrt{2}}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+\frac{1}{24\sqrt{2}}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4+o\left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4\right)$;

3) $\frac{95}{3}+\frac{214}{3}(x-2)+72(x-2)^2+\frac{112}{3}(x-2)^3+\frac{29}{3}(x-2)^4+(x-2)^5+o(x^n)$; **4)** C ; **5)** C ; **6)** $x_0 = 2$ punto di massimo locale; **7)** $b > -1/3$, $\forall a$, $x_0 = 0$ minimo locale; $b < -1/3$, $\forall a$, $x_0 = 0$ massimo locale ; $b = -1/3$, $a \neq 2$, $x_0 = 0$ punto di flesso; $b = -1/3$, $a = 2$, $x_0 = 0$ minimo locale; **11)** 4,11324044 con n = 3 ; **12)** 0,70733…con n = 5

13) $8\sum_{k=0}^{3}\binom{1/2}{k}\frac{1}{64^k}+\frac{5}{2^{31}}$; **14)** 2,0800… ; 5/248832 .