STUDIO DI FUNZIONE

1) Data la funzione $f(x) = 3x^5 - 50x^3 + 135x$, determinare il numero di radici reali dell'equazione $f(x) + k = 0$, al variare di $k \in R$.

2) Trovare, al variare di $k \in R$, il numero di soluzioni dell'equazione: $x^4 + 3x^3 - 5x^2 = 3x + k$.

3) Trovare il numero di soluzioni dell'equazione $2x^3 - 3x^2 - 36x + \alpha = 0$, $(\alpha \in R)$.

4) Data la funzione $f(x) = \dfrac{x(2-x)}{8+2x^2}$, disegnarne l'andamento qualitativo e determinare al variare di $T \in R$ il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = T$.

5) Studiare le seguenti funzioni e disegnarne il grafico:

a) $f(x) = x^4 + 2x^3 - 2x - 1$; b) $f(x) = x^{\frac{4}{3}} - 8x^{\frac{1}{3}}$; c) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - |x+2|}$;

d) $f(x) = x^2 - 2x + 2\log|1 + x|$; e) $f(x) = e^{ax} - a^2x$ (per $x \geq 0$) ; f) $f(x) = \dfrac{k^2}{x} - kx$.

6) Studiare la funzione $f(x) = \min\left\{5, \dfrac{x^2}{|x-1|}\right\}$ e disegnarne il grafico.

7) Studiare la funzione $f(x) = 2x + 2 - 3\cdot\sqrt[3]{(x+1)^2}$, determinandone in particolare dominio, segno, limiti agli estremi del campo di esistenza, intervalli di monotonia, intervalli di concavità. Tracciare poi un grafico della funzione.

8) Studiare la funzione $f(x) = x \cdot e^{-\frac{2}{x}}$, determinando dominio, segno, limiti agli estremi del campo di esistenza, intervalli di monotonia, eventuali massimi e minimi locali. Dopo aver determinato l'equazione dell'asintoto obliquo, stabilire in quali intervalli il grafico della curva sta al di sopra dell'asintoto obliquo e in quali sta al di sotto.

9) Studiare la funzione $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot (x-6)$, determinando dominio, segno, limiti agli estremi del campo di esistenza, intervalli di monotonia, intervalli di concavità, eventuali massimi e minimi locali. Disegnare il grafico della funzione e trovare il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = k$, al variare del parametro $k \in R$..

10) Determinare, al variare del parametro $k \in R$, il numero di intersezioni della retta di equazione $y = -2x + k$ con il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$.

11) Determinare, al variare del parametro $k \in R$, il numero di soluzioni $x > 0$ dell'equazione $f(x) = k$ dove $f(x) = x^6 - 18x^3 + 16 \log x^3$.

12) Determinare, al variare del parametro $a \in R$, il numero di soluzioni delle seguenti equazioni:

a) $e^{\frac{1}{x}} - ax = 0$; b) $\dfrac{2}{3}x^3 + a - 2\log x = 0$

13) Dimostrare che il grafico della funzione $f(x) = x^{100} + ax + b$ interseca l'asse delle ascisse al massimo in due punti .

14) Data la funzione $f(x) = \ln[x^3 - (a + 1)x]$, determinarne dominio e asintoti al variare del parametro reale a. Determinare inoltre i valori del parametro a per cui la funzione ammette un estremo relativo in $x = -1$ e stabilire se tale punto è un massimo o un minimo relativo.

RISULTATI:
1) 1 soluz. per k < - 216 e per k > 216 , 2 soluz. per k = - 216 e per k = 216 , 3 soluz. per – 216 < k < - 88 e per 88 < k < 216 , 4 soluz. per k = - 88 e per k = 88 , 5 soluz. per – 88 < k < 88 ; **2)** 1 soluz. per k = - 36 , 2 soluz. per – 36 < k < - 4 e per k > 101/256 , 3 soluz. per k = - 4 e per k = 101/256 , 4 soluz. per – 4 < k < 101/256; **3)** 1 soluz. per α < - 44 e per α > 81 , 2 soluz. per α = - 44 e per α = 81 , 3 soluz. per – 44 < α < 81 ; **4)** asintoto y = - 1/2 , min $\left(-2-2\sqrt{2},-\frac{1+\sqrt{2}}{4}\right)$, max $\left(-2+2\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}-1}{4}\right)$, 1 soluz. per T = $-\frac{1+\sqrt{2}}{4}$, T = $\frac{\sqrt{2}-1}{4}$, T = - 1/2 , 2 soluz. per $-\frac{1+\sqrt{2}}{4}$< T < - 1/2 e per – 1/2 < T < $\frac{\sqrt{2}-1}{4}$; **5)** a) min (1/2 , - 27/16), F_1 (- 1 , 0) , F_2 (0 , - 1) ; b) min (2 , - 6$\sqrt[3]{2}$) , F_1 (- 4 , 12$\sqrt[3]{4}$) , F_2 (0 , 0) ; c) max (0 , 0) , max (- 4 , 8/7) , min 8- 2, 1) , x = - 1 e x = 2 asintoti verticali, y = 1 asintoto orizzontale; d) F_1 (- 2 , 8) , F_2 (0 , 0) ; e) per a > 1 min ((1/a)$\cdot$ loga , a$\cdot$ (1 – loga)) , per a <0 funzione decrescente , per 0 < a ≤ 1 funzione crescente ; f) per k < 0 min $(\sqrt{-k},-2k\sqrt{-k})$ e max $(-\sqrt{-k},2k\sqrt{-k})$, per k > 0 funzione decrescente; **6)** $\min_1$ (0 , 0) , $\min_2$ (2 , 4) , funzione costante f(x) = 5 per $x \le \frac{-5-3\sqrt{5}}{2}$, per $\frac{-5+3\sqrt{5}}{2} \le x \le \frac{5-\sqrt{5}}{2}$ e per $x \ge \frac{5+\sqrt{5}}{2}$; **7)** f(x) crescente per x < - 1 e per x > 0 , x = 0 min. locale, x = - 1 max. locale, f(x) convessa ∀ x ≠ - 1 ; **8)** asintoto y = x – 2 , max (- 2 , - 2e) ; **9)** una soluzione per k < $-4\cdot e^{-1/4}$ e per k ≥ 0, due soluz. per k = $-4\cdot e^{-1/4}$, tre soluz. per $-4\cdot e^{-1/4}$< k < 0 ; **10)** k < 7 una soluzione, k = 7 due soluz. , k > 7 tre soluz. ; **11)** per k < 48log2 – 80 o k > - 17 una soluzione , per k = 48log2 – 80 e k = - 17 due soluz. , per 48log2 – 80 < k < - 17 tre soluz. **12)** a) 2 soluz. per - 1/e < a < 0 , 1 soluz. per a = - 1/e e per a > 0 ; 1 soluz. per a = - 2/3 , 2 soluz. per a < - 2/3 ; **14)** asintoti: x = 0 e x = $\pm\sqrt{a+1}$, per a = 2 x = - 1 max relativo.