DERIVATE E APPLICAZIONI

1) Calcolare la derivata prima delle seguenti funzioni:

a) $f(x) = sen^2x + \cos x$; b) $f(x) = x^2 \cdot sen^3x$; c) $f(x) = (x + senx)^5$; d) $f(x) = x^3 \cdot e^x + \cos^3 x$;

e) $f(x) = sen(senx)$; f) $f(x) = e^{x\cos x}$; g) $f(x) = e^{senx} + \cos(x + senx)$; h) $f(x) = e^{x^2} \cdot \cos x^2$;

i) $f(x) = \dfrac{2\sqrt[3]{x} + 3}{x^3 + x + 1}$; l) $f(x) = \sqrt{\dfrac{2x^2 + 1}{x^4 + 2}}$; m) $f(x) = \log \dfrac{1 + x}{x^3}$; n) $f(x) = \dfrac{\log(3x^2 + 2)}{\sqrt{x^5 - 1}}$.

2) Sia f(x) da R ad R una funzione derivabile. Calcolare la derivata della funzione $g(x) = [x \cdot f(x)]^2$.

3) La derivata di $f(x) = \cos\left(e^{x^2}\right)$ è: A) $f'(x) = -e^{x^e} \cdot sen\left(e^{x^2}\right)$; B) $f'(x) = -e^{-2x} \cdot sen\left(e^{x^2}\right)$;
C) $f'(x) = -2x \cdot e^{x^e} \cdot sen\left(e^{x^2}\right)$; D) $f'(x) = -2x \cdot sen\left(e^{x^2}\right)$

4) Date due funzioni f(x) e g(x) da [0 , 2] ad R, derivabili in $]0,2[$, determinare le condizioni per le quali risulta derivabile in $]0,2[$ la funzione $h(x) = \begin{cases} f(x) & 0 \le x \le 1 \\ g(x) & 1 < x \le 2 \end{cases}$

5) Determinare i valori di α per i quali la funzione $f(x) = \begin{cases} x^\alpha sen\dfrac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$ risulta ovunque differenziabile e calcolare f'(x). Verificare che per $\alpha = 2$ f(x) è derivabile, ma la derivata non è continua in x = 0.

6) Data la funzione $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & x \le c \\ 3ax + b & x > c \end{cases}$ determinare a , b in funzione di c affinché esista f '(c).

7) Discutere la derivabilità in R della seguenti funzione: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}} & x \ne 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

8) Determinare il valore dei parametri a e b in modo che la funzione f(x) abbia derivata prima continua su tutto R: $f(x) = \begin{cases} e^{1-x} - ax & x \le 1 \\ bx^2 + 3x - 3 & x > 1 \end{cases}$

9) La funzione $f(x) = \begin{cases} a\,sen(2x) + b\cos(3x) + x, & x \le 0 \\ ae^x + b\arctan\left(\dfrac{x}{2}\right) + 1, & x > 0 \end{cases}$ è derivabile se e solo se a e b $\in$R verificano:

A) a qualsiasi, b = 2a + 2 ; B) nessuna delle altre risposte è vera ; C) a = - 1 e b = 0 ; D) a = 1 e b = 2 .

10) Determinare il valore dei parametri a , b e c in modo che la funzione f(x) abbia derivata seconda continua su tutto R: $f(x) = \begin{cases} ax + b + x^2 & x < 1 \\ ce^{x-1} + x^3 & x \ge 1 \end{cases}$

11) Trovare i punti di non derivabilità della funzione $f(x) = \sqrt{\left||x| - 1\right|}$

12) Quale fra le seguenti proposizioni è vera? (A) f(x) derivabile in [- 1 , 1] $\Rightarrow$ f '(x) continua in [- 1 , 1]; (B) f(x) derivabile in [- 1 , 1] $\Rightarrow$ f (x) ha massimo su [- 1 , 1] ; (C) f(x) derivabile in $[-1,1[$ $\Rightarrow$ f(x) ha limite per $x \to -1^+$; (D) f(x) derivabile in $[-1,1[$ $\Rightarrow$ f(x) inferiormente limitata.

13) Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x) = \log(2 + x^2)$ in corrispondenza del punto di ascissa $x_0 = -1$.

14) Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x) = (x + 2)^{x+3}$ in corrispondenza del punto di ascissa $x_0 = 0$.

15) Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x) = x^3$ nel punto di ascissa x_0 . Il grafico della cubica $f(x) = x^3$ si trova sempre al di sopra delle sue rette tangenti?

16) Sia $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$, allora: A) f(x) ha minimo su $]0,+\infty[$; B) $f(x) \to -\infty$ quando $x \to -\infty$; C) f(x) ha massimo su R ; D) f(x) è decrescente in $]-\infty,0[$.

17) Determinare i valori minimo e massimo della funzione $f(x) = \sqrt{1-x^2} + \left|x + \dfrac{1}{2}\right|$.

18) Discutere al variare del parametro a gli estremi relativi della funzione $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \le a \\ (x-1)^2 & x > a \end{cases}$

19) Data la funzione $f : [0 , +\infty[\to \Re$ derivabile e con $f'(x)$ continua $\forall\, x \in [0 , +\infty[$, si sa che: $f(0) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ e $f'(x) .(x-1) > 0$ $\forall\, x \ge 0$ con $x \ne 1$. a) calcolare $f'(1)$, b) disegnare un grafico coerente con le informazioni ; c) mostrare che f(x) ha un minimo assoluto ; d) mostrare che f(x) = 0 ammette esattamente due soluzioni in $[0 , +\infty[$.

20) Sia $f: R \to R$ tale che : $f(0) = 1$, $f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$ e $f^{iv}(0) = -2$.
Quale fra le seguenti risposte è certamente vera? A) x = 0 è punto di massimo assoluto; B) nessuna delle altre risposte è vera ; C) x = 0 è punto di minimo relativo ; D) x = 0 è punto di flesso.

21) Se $f : [0 , 1] \cup [2 , 3] \to R$ ha derivata sempre maggiore di 5, allora:
A) $f(1) > 5 + f(0)$; B) f è crescente ; C) $f(3) > 5 \cdot f(0)$; D) $\dfrac{f(3)-f(0)}{3} > 5$

22) Provare che la funzione $f(x) = \arctan(x) + \log(x)$ è invertibile nel suo dominio e calcolare la derivata di $f^{-1}(x)$ in $\pi/4$.

23) Data la funzione $f(x) = x + \log x + e^x$, calcolare la derivata di $f^{-1}(x)$ in $x = e + 1$.

24) Data la funzione $f(x) = \log x - \dfrac{1}{\log x}$, calcolare la derivata di $f^{-1}(x)$ in x = 0.

25) La funzione inversa di $f(x) = 3x + \cos x$: (A) è derivabile su R ; (B) è $f^{-1}(y) = 1/3\, y + \arccos y$;
(C) è $f^{-1}(y) = \dfrac{1}{3y + \cos y}$; (D) non esiste perché la funzione cosx è periodica.

26) Data la funzione $f(x) = 5x + x^3 + 2x^5$, scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di $f^{-1}(x)$ nel suo punto di ascissa 8.

27) Data la funzione $f(x) = 4x - \operatorname{sen} x + 5$, scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di $f^{-1}(x)$ nel suo punto di ascissa $4\pi + 5$.

28) Stabilire se la seguente funzione è monotona: $f(x) = 12x - 2x^3 - 3x^2 - 1$.
Dopo aver determinato i massimi e i minimi locali di f(x), determinare, al variare del parametro k, il numero delle soluzioni dell'equazione f(x) = k.

29) Sia f(x) funzione da R ad R con $f''(x)$ continua in R ; se $g(x) = x \cdot f(x)$ ha minimo locale in x = 0, allora: (A) $f(0) = 0$ e $f'(0) = 0$; (B) $f(0) = 0$ e $f''(0) > 0$; (C) $f(0) = 0$ e $f'(0) \geq 0$; (D) f(x) ha minimo locale in x = 0.

30) Data una funzione $f : R \to R$ convessa e derivabile, e tale che f (0) = 0, dimostrare che si ha $f(x) \leq x \cdot f'(x) \ \forall x \in R$.

31) Data la funzione $f(x) = x^2$, verificare che il grafico della curva sta sopra la retta tangente nel punto del grafico di coordinate (1 , f(1)). Dimostrare che questo accade per ogni punto del grafico di coordinate $(x_0, f(x_0))$.

32) Dimostrare che, se $f : R \to R$ è una funzione convessa, derivabile, con f(0) = 0 e $f'(0) = 1$, si ha $f(x) \geq x \ \forall x \in R$.

33) Scrivere una funzione $f : R \to R$ tale che: f è strettamente crescente $\forall x \in R$, f è strettamente concava su $]-\infty,1[$, f è strettamente convessa su $]1,+\infty[$, f(1) = 1 , $f'(1) = 0$.

RISULTATI:
3) C ; 5) $\alpha > 1$; 6) a = 2/3 c , $b = 2 - c^2$; 7) non deriv. in x = 0 ; 8) a = 6 , b = - 5; 9) C ; 10) a = - 3 , b = - 1 , c = - 4 ; 11) x = - 1 e x = 1 cuspidi, x = 0 punto angoloso ; 12) (B) ; 13) y = log3 – 2/3 – 2/3 x ; 14) y = 8 + 8 (log2 + 3/2)x ; 15) $y = 3x_0^2x - 2x_0^3$, no; 16) C ; 17) min. (- 1 , 1/2) , max $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2} + \sqrt{2}\right)$; 18) se a < 0 minimo in x =1, se $0 \leq a \leq 1$ due punti di minimo in x = 0 e in x = 1, se a > 1 un minimo in x = 0 ; 20) B ; 21) A ; 22) 2/3 ; 23) 1/(2 + e) ; 24)1/(2e) ; 25) (A) ; 26) y = 1/18 x + 5/9 ; 27) $x - 5y + \pi - 5 = 0$; 28) crescente per – 2 < x < 1; m (- 2 , - 21) , M (1 , 6) ; 1 soluz. per k < - 21 e per k > 6, 3 soluz. per – 21 < k < 6, 2 soluz. per k = - 21 e per k = 6 ; 29) (C) .