

Successioni per Ricorrenza

Discussione Preliminare

Se si vuole calcolare $\sqrt{2}$, un metodo è quello di approssimarla con i numeri razionali sfruttando la definizione, ovvero $q = \sqrt{2}$ se $q^2 = 2$

$$1^2 < 2 < 4 \Rightarrow 1 < \sqrt{2} < 2$$

$$(1,4)^2 < 2 < (1,5)^2 \Rightarrow 1,4 < \sqrt{2} < 1,5$$

$$(1,41)^2 < 2 < (1,42)^2 \Rightarrow 1,41 < \sqrt{2} < 1,42 \text{ etc}$$

Questo processo di certo funziona ma è lento!

Potremmo invece considerare $\sqrt{2}$ come radice di

$$x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = x^2 - x^2 + 2 \Rightarrow 2x^2 = x^2 + 2$$

$$\Rightarrow x = \frac{x^2}{2x} + \frac{2}{2x} \Rightarrow x = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$$

Se ora considero $y = f(x)$ con $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$, si

ovvero che $\sqrt{2} = f(\sqrt{2})$, ovvero

$$(\sqrt{2}, \sqrt{2}) \text{ soddisfa il sistema } \begin{cases} y = f(x) \\ y = x \end{cases}$$

Ma questa linea deduttiva porta a qualcosa?

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2}, \text{ e } f'(x) \text{ è crescente sull'intervallo } [1, 2]$$

$$\text{dunque } \max |f'|([1, 2]) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

Ne segue che f è Lipschitziana sull'intervallo $[1, 2]$

con costante di Lipschitz $\frac{1}{4}$

Def (Contrazione)

Dato una funzione $f: A \rightarrow B$, questa si dice

"contrazione" se è Lipschitziana con costante $L < 1$

$$\text{ovvero } \exists L \in [0, 1) : |f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \forall x, y \in A$$

Esempio ($f(x) = \frac{1}{x}$ è una contrazione su $[3, 10]$)

La funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ è una contrazione su $[3, 10]$
dim

Si ha $f' = -\frac{1}{x^2}$, dunque $\max |f'|([3, 10]) = \frac{1}{9} < 1$

dunque si ha $|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{9} |x - y| \quad \forall x, y \in [3, 10]$ ✓

Esempio ($f(x) = \frac{1}{x}$ non è una contrazione su $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$)

La funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ non è una contrazione
su $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$

dim

$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ ma $\max |f'|([\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]) = |f'(\frac{1}{4})| = 16 > 1$

dunque la funzione è Lipschitziana ma con
costante $16 > 1$ ✓

Esempio ($f(x) = x$ non è mai una contrazione)

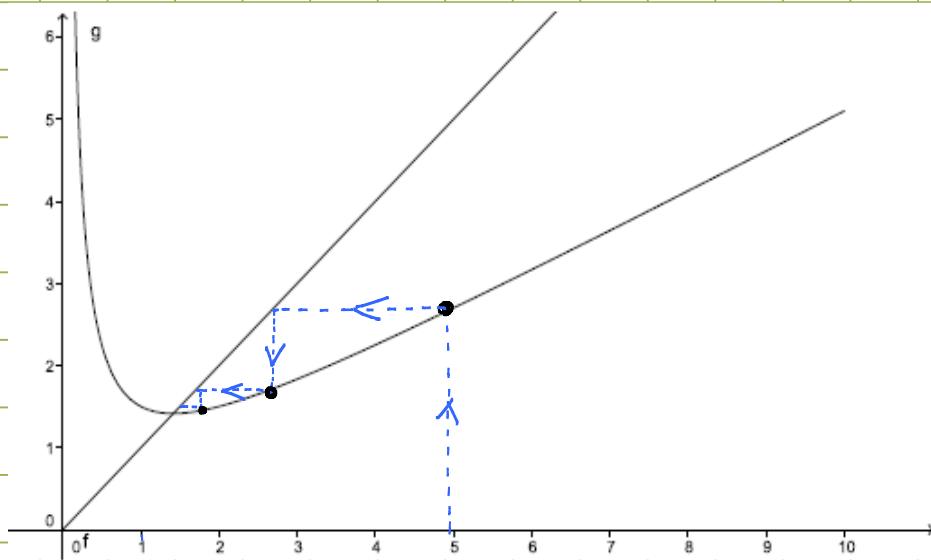
$f(x) = x$ non è una contrazione su nessun insieme A

dim

Si ha infatti $|x - y| = |x - y|$ ovvero $f(x) = x$ è
Lipschitziana di costante $L = 1$, e questo non
dipende dall'insieme su cui è definita ✓

Perché sono importanti le contrazioni? Prendiamo

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$$



$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$$

$$5 > f(5) = \frac{5}{2} + \frac{1}{5} = \frac{27}{10} > f\left(\frac{27}{10}\right) = \frac{27}{20} + \frac{10}{27} > \dots$$

ovvero sembra che

$$a_0 > a_1 = f(a_0) > a_2 = f(a_1) > \dots > \sqrt{2}$$

e sembra anche che $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \sqrt{2}$

Osserviamo che

$$f: [\sqrt{2}, 5] \rightarrow [\sqrt{2}, 5]$$

infatti $\forall x \in [\sqrt{2}, 5]$ $f(x) \geq \sqrt{2}$: $f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2} = 0$ me $x = \pm \sqrt{2}$
 $f' \begin{cases} < 0 & x < \sqrt{2} \\ > 0 & x > \sqrt{2} \end{cases}$
 $\Rightarrow \sqrt{2}$ è punto di minimo $\Rightarrow f(x) \geq f(\sqrt{2}) = \sqrt{2} \quad \forall x > 0$
 inoltre
 $f' > 0 \quad \forall x \in [\sqrt{2}, 5] \Rightarrow \max f([\sqrt{2}, 5]) = f(5) = \frac{5}{2} + \frac{2}{5} < 5$

$x_0 = \sqrt{2}$ sembra un punto fisso

Def (Ponto fixo)

data una funzione $f: X \rightarrow X$, un punto $x_0 \in X$ viene detto "punto fisso per f " se $f(x_0) = x_0$

Teorema (di Banach-Caccioppoli o delle contrazioni)

Sia $f: C \rightarrow C$ dove

i) $C \subseteq \mathbb{R}$ è chiuso

i) f è una contrazione, ovvero $\forall x, y \in C \quad |f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad L < 1$

allora $\exists! x \in C : f(x) = x$

dim

Fixado um qualquer $x_0 \in C$, definiamo $\begin{cases} x_0 \\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases} \forall n \in \mathbb{N}$

Proviamo che $\{x_n\}_n$ è di Cauchy

$$|x_2 - x_1| = |f(x_1) - f(x_0)| \leq L |x_1 - x_0|$$

$$|x_3 - x_2| = |f(x_2) - f(x_1)| \leq L |x_2 - x_1| \leq L^2 |x_1 - x_0|$$

e per induzione si prova

$$|x_{m+1} - x_m| = \left| \frac{p}{q}(x_m) - \frac{p}{q}(x_{m-1}) \right| \leq L \cdot |x_m - x_{m-1}| \leq L \cdot L^{m-1} \cdot |x_{m-1} - x_{m-2}| \leq \dots \leq L^m \cdot |x_1 - x_0|$$

Il se voit que, quelque ni prendons $M > m$

$$\begin{aligned} |X_m - X_n| &= |X_m - X_{m-1}| + |X_{m-1} - X_{m-2}| + \dots + |X_{m+1} - X_m| \\ &\leq L^{m-1} |X_1 - X_0| + L^{m-2} |X_1 - X_0| + \dots + L^0 |X_1 - X_0| \end{aligned}$$

e dunque

$$|X_m - X_n| \leq L^m (L^{m-m-1} + L^{m-m-2} + \dots + 1) \cdot |X_1 - X_0|$$

$$= L^m \cdot \frac{L^{m-m} - 1}{L - 1} \cdot |X_1 - X_0| = \frac{L^m - L^0}{L - 1} \cdot |X_1 - X_0|$$

Ma f è una contrazione, dunque $L \in [0, 1)$ e perciò
 posto $\varepsilon = \frac{L^{\bar{m}}}{1-L} \cdot |X_1 - X_0|$ si ha $L^{\bar{m}} = \frac{\varepsilon \cdot (1-L)}{2 \cdot |X_1 - X_0|}$ $\bar{m} = \log_L \left(\frac{\varepsilon(1-L)}{2 \cdot |X_1 - X_0|} \right)$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{m} > 0 : \forall n, m > \bar{m} \quad \frac{L^m - L^n}{1-L} |X_1 - X_0| \leq \frac{2L^{\bar{m}}}{1-L} \cdot |X_1 - X_0| = \varepsilon$$

ovvero

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{m} : \forall n, m > \bar{m} \quad |X_n - X_m| < \varepsilon$$

Essendo $\{X_n\}_n$ di Cauchy $\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = \bar{x}$ ed essendo
 C un insieme chiuso

$$\Rightarrow \bar{x} \in C$$

Per come è definita $\{X_n\}_n$ si ha

$$X_{n+1} = f(X_n)$$

$\begin{array}{ccc} \nearrow n \rightarrow +\infty & & \downarrow n \rightarrow +\infty \\ \bar{x} & & f(\bar{x}) \end{array}$

(per la continuità di f in $\bar{x}$)

Quindi resta provato che $\bar{x}$ è un punto fisso $\checkmark$

Ne segue che la successione

$$\begin{cases} X_0 = 5 \\ X_{n+1} = \frac{1}{2} \left(X_n + \frac{2}{X_n} \right) = f(X_n) \end{cases}$$

risulta $f = \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right)$, $f: [\sqrt{2}, 5] \rightarrow [\sqrt{2}, 5]$, f è una contrazione
 $\Downarrow$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} X_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(X_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \left(X_n + \frac{2}{X_n} \right) = \frac{1}{2} \left(\bar{x} + \frac{2}{\bar{x}} \right)$$

$\parallel$
 $\bar{x}$

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{1}{2} \left(\bar{x} + \frac{2}{\bar{x}} \right) \Rightarrow 2\bar{x}^2 = \bar{x}^2 + 2 \Rightarrow \bar{x} = \sqrt{2}$$

($\bar{x} = -\sqrt{2} \notin [\sqrt{2}, 5]$)

Altro modo per studiare

$$\begin{cases} x_0 = 5 \\ x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right) \end{cases}$$

1) Proviamo che $x_n \geq \sqrt{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$x_1 = f(x_0) = f(5) = \frac{5}{2} + \frac{1}{5} = \frac{27}{10} > \sqrt{2} \quad \text{ok}$$

supponiamo (tip. induttiva) $x_n > \sqrt{2}$

$$x_{n+1} = f(x_n) = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} > \sqrt{2} \quad \text{se} \quad x_n^2 + 2 > 2\sqrt{2} x_n$$
$$\text{se} \quad (x_n - \sqrt{2})^2 > 0$$

e quest'ultima disuguaglianza è vera poiché $x_n > \sqrt{2}$!

2) Proviamo che $\{x_n\}_n$ è decrescente

$$x_0 = 5 > \frac{27}{10} = x_1 = f(x_0) \quad \text{ok}$$

Supponiamo $x_{n-1} > x_n = f(x_{n-1})$ (tip. induttiva)

$$\text{se} \quad x_n > x_{n+1} = f(x_n) = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} \quad \text{se} \quad 2x_n^2 > x_n^2 + 2$$
$$\text{se} \quad x_n^2 > 2$$

e questa ultima d'ing. è vera poiché nel punto 1) si è provato $x_n > \sqrt{2} \quad \forall n$

$$3) \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \sqrt{2}$$

Essendo $\{x_n\}_n$ decrescente e limitata inferiormente da $\sqrt{2}$

$$\Rightarrow \text{(Teorema Convergenza successioni monotone)} \quad \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \bar{x}$$

$$\text{Inoltre} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) \stackrel{\text{per la continuità di } f}{=} f(\bar{x}) = \frac{\bar{x}}{2} + \frac{1}{\bar{x}}$$
$$\stackrel{||}{=} \bar{x}$$

$$\Rightarrow \left(\text{Trovo 2 soluzioni } \bar{x} = \pm \sqrt{2} \right. \\ \left. \text{ma } x_n > \sqrt{2} \quad \forall n \right) \quad \bar{x} = \sqrt{2}$$

$$\text{Ora: il } \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \text{ di } \begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = \frac{x}{2} + \frac{1}{x} \end{cases} \quad \text{è anche } \bar{x} = \sqrt{2}$$

L'unica differenza rispetto a prima è che $f(1) = \frac{3}{2}$ e dunque

si prova $x_n > \sqrt{2} \quad \forall n \geq 1$

$\{x_n\}_n$ decrescente $\forall n \geq 1$

e non 0 come prima

Per calcolare $\sqrt{5}$ posso calcolare $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ ove $\begin{cases} x_0 = 6 \\ x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{5}{x_n} \right) \end{cases}$

Più in generale

Preso $\alpha > 0$, per calcolare $\sqrt{\alpha}$ si calcola $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ dove

$$\begin{cases} x_0 = \alpha + 1 \\ x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{\alpha}{x_n} \right) \end{cases}$$

Calcolo di $\sqrt[3]{2}$

Preso $\alpha = 2$, se voglio calcolare $\sqrt[3]{2}$ devo considerare la radice reale dell'equazione $x^3 = 2$. Si è tentati di replicare quanto fatto per il calcolo di $\sqrt{2}$, ovvero cercare il punto fisso di

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 > \sqrt[3]{2} \\ x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n^2} \right) = f(x_n) \quad n \geq 1 \end{array} \right\} \leftarrow \begin{array}{l} \text{NON VA} \\ \text{BENE} \end{array}$$

Ma non funziona perché è vero che $f(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{2}$, però $f(\sqrt[3]{2})$ non è il minimo di f su $]0, +\infty[$!

Dobbiamo quindi considerare una $\neq$ successione

$$x^3 = 2 \Rightarrow 3x^3 = 2x^3 + 2 \Rightarrow x = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3x^2}$$

ovvero

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 > \sqrt[3]{2} \\ x_{n+1} = \frac{1}{3} \left(2x_n + \frac{2}{x_n^2} \right) = f(x_n) \quad n \geq 1 \end{array} \right.$$

Questa nuova successione soddisfa le seguenti proprietà

(i) $x_n \geq \sqrt[3]{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

In fatti $x_0 > \sqrt[3]{2}$

Suppongo $x_n = f(x_{n-1}) > \sqrt[3]{2}$

$$x_{n+1} = \frac{1}{3} \left(2x_n + \frac{2}{x_n^2} \right) > \sqrt[3]{2} \quad \text{se} \quad 2x_n + \frac{2}{x_n^2} > 3\sqrt[3]{2}$$

$$\text{se} \quad 2x_n^3 + 2 > 3x_n^3 \sqrt[3]{2} \quad \text{se} \quad 2x_n^3 - 3x_n^3 \sqrt[3]{2} > -2$$

$$\text{Ma essendo } x_n > \sqrt[3]{2} \quad 2x_n^3 - 3x_n^3 \sqrt[3]{2} > 2 \cdot 2 - 3 \cdot 2 = -2 \quad \text{Vero!}$$

(ii) $\{x_n\}_n$ è decrescente Preso $x_0 > \sqrt[3]{2}$

$$x_1 = f(x_0) = \frac{1}{3} \left(2x_0 + \frac{2}{x_0^2} \right) < x_0 \text{ ne } 2x_0 + \frac{2}{x_0^2} < 3x_0 \text{ ne } 2x_0^3 + 2 < 3x_0^3$$

$$\text{ne } 2 < x_0^3$$

Supponiamo $x_n = f(x_{n-1}) > x_{n-1}$

$$x_{n+1} = f(x_n) = \frac{1}{3} \left(2x_n + \frac{2}{x_n^2} \right) < x_n \text{ ne } 2x_n^3 + 2 < 3x_n^3$$

$$\text{ne } 2 < x_n^3$$

ma quest'ultima è vera per le (i)

$$(iii) \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \sqrt[3]{2}$$

La successione $\{x_n\}_n$ è decrescente, è infinitamente limitata

da $\sqrt[3]{2} \Rightarrow$ (Teorema Convergenza
necessaria monotona) $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \bar{x}$

Dovendo essere

$$\begin{array}{ccc} x_{n+1} = f(x_n) & & \\ \swarrow \text{ } n \rightarrow +\infty \text{ (limite)} & \searrow \text{ } n \rightarrow +\infty \text{ (f è continua in } \bar{x}) & \\ \bar{x} & & f(\bar{x}) \end{array}$$

dunque $\bar{x}$ è punto fisso di f , ovvero $\bar{x} = f(\bar{x})$, ovvero
 $\bar{x} = \sqrt[3]{2}$

Più in generale,

Preso $\alpha > 0$, per calcolare $\sqrt[3]{\alpha}$ si calcola $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ dove

$$\begin{cases} x_0 > \sqrt[3]{\alpha} \\ x_{n+1} = \frac{1}{3} \left(2x_n + \frac{\alpha}{x_n^2} \right) \end{cases}$$

Calcolo di $\sqrt[3]{\alpha}$

Per calcolare $\sqrt{\alpha}$ abbiamo introdotto $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{\alpha}{2x}$

" " $\sqrt[3]{\alpha}$ " " $f(x) = \frac{2}{3}x + \frac{\alpha}{3x^2}$

" " $\sqrt[4]{\alpha}$ si può tentare con $f(x) = \frac{3}{4}x + \frac{\alpha}{4x^3}$

questo Testarino per calcolare $\sqrt[4]{a}$ è buono in quanto

$$\left(\frac{3}{4}x + \frac{a}{4x^3}\right)' = \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \frac{a}{x^4} = 0 \text{ se } x = \sqrt[4]{a}$$

e dunque il minimo di f è $f(\sqrt[4]{2}) = \sqrt[4]{2}$!

Dunque possiamo provare che $\exists$ limite per $n \rightarrow \infty$ di

volgere i calcoli!

$$\begin{cases} x_0 > \sqrt[4]{2} \\ x_{n+1} = \frac{1}{4} \left(3x_n + \frac{a}{x_n^3} \right) \end{cases}$$

Pero $a > 0$, per calcolare $\sqrt[4]{a}$ si calcola $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ dove

$$\begin{cases} x_0 > \sqrt[4]{a} \\ x_{n+1} = \frac{1}{4} \left(3x_n + \frac{a}{x_n^3} \right) \end{cases}$$

In fine si prova per $p > 0$

Pero $a > 0$, per calcolare $\sqrt[p]{a}$ si calcola $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ dove

$$\begin{cases} x_0 > \sqrt[p]{a} \\ x_{n+1} = \frac{1}{p} \left((p-1)x_n + \frac{a}{x_n^{p-1}} \right) \end{cases}$$

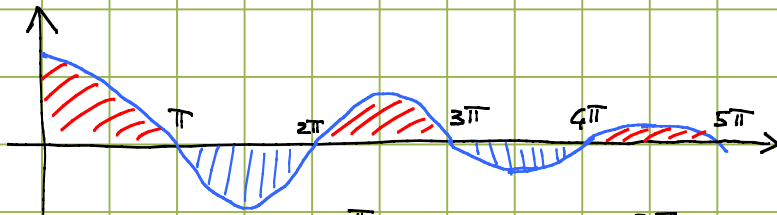
$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ converge / $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$ diverge

Esercizio (difficile)

Prova che $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \in \mathbb{R}$
 cioè

La funzione $f(t) = \frac{\sin t}{t}$: $\max f(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$,

$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$, $f(t) = 0$ me $t = k\pi$ $k=1,2,3,\dots$



Poniamo $a_1 = \int_0^{\pi} f(t) dt$ $a_2 = - \int_{\pi}^{2\pi} f(t) dt$ $a_3 = \int_{2\pi}^{3\pi} f(t) dt$ $a_4 = - \int_{3\pi}^{4\pi} f(t) dt$

$$a_2 = - \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt = - \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin(y+\pi)}{y+\pi} dy = \int_0^{\pi} \frac{\sin y}{y+\pi} dy \leq \int_0^{\pi} \frac{\sin y}{y} dy = a_1$$

$y = t - \pi$

analogamente si prova $a_3 \leq a_2$, $a_4 \leq a_3$ etc

Su periamo (k.p. induttiva) $a_n \leq a_{n-1}$

Vogliamo provare $a_{m+1} \leq a_m$

m pari $a_{m+1} = \int_{m\pi}^{(m+1)\pi} \frac{\sin t}{t} dt = \int_{(m-1)\pi}^{m\pi} \frac{\sin(y+\pi)}{y+\pi} dy = - \int_{(m-1)\pi}^{m\pi} \frac{\sin y}{y+\pi} dy \leq - \int_{(m-1)\pi}^{m\pi} \frac{\sin y}{y} dy = a_m$

$y = t - \pi$

m dispari $a_{m+1} = - \int_{m\pi}^{(m+1)\pi} \frac{\sin t}{t} dt = - \int_{(m-1)\pi}^{m\pi} \frac{\sin(y+\pi)}{y+\pi} dy = \int_{(m-1)\pi}^{m\pi} \frac{\sin y}{y+\pi} dy \leq \int_{(m-1)\pi}^{m\pi} \frac{\sin y}{y} dy = a_m$

$y = t - \pi$

$-\sin y \geq 0 \quad \forall y \in [(m-1)\pi, m\pi]$

Donque $\{a_n\}$ è debolmente decrescente

Inoltre $\lim_{m \rightarrow +\infty} a_m = \lim_{m \rightarrow +\infty} (-1)^{m+1} \int_{m\pi}^{(m+1)\pi} \frac{\sin t}{t} dt = 0$

in quanto $\int_{m\pi}^{(m+1)\pi} \frac{\sin t}{t} dt = \pi f(\xi_m)$ dove $m\pi \leq \xi_m \leq (m+1)\pi$

$$|f(\xi_m)| \leq \frac{1}{m\pi} \Rightarrow \lim_m |f(\xi_m)| \leq \lim_m \frac{1}{m\pi} = 0$$

Inoltre, per costruzione,

$$Q_m = (-1)^m \int_{m\pi}^{(m+1)\pi} \frac{\sin t}{t} dt \geq 0 \quad \forall m \geq 0$$

A questo punto abbiamo verificato tutte le ipotesi del Criterio di Leibniz, e dunque

$\sum_m (-1)^m \cdot Q_m$ è convergente

$$\begin{aligned} \text{Ma} \quad \int_0^{(m+1)\pi} \frac{\sin t}{t} dt &= \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt + \dots + \int_{m\pi}^{(m+1)\pi} \frac{\sin t}{t} dt \\ &= \sum_{k=1}^m (-1)^k \cdot Q_k \end{aligned}$$

$$\text{ovvero} \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k Q_k, \text{ e quindi}$$

anche l'integrale converge



Esercizio (media difficoltà)

Provare che

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t} dt = +\infty$$

dim

In questo caso si deve ricordare che $\sum_m \frac{1}{m}$ diverge a $+\infty$.

$$\text{Si ha che} \quad \int_{m\pi}^{(m+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt \geq \frac{1}{m\pi} \cdot \int_{m\pi}^{(m+1)\pi} |\sin t| dt = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{m}$$

Dunque

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty$$

