Lezione 45 – Analisi Matematica 1 – 9 gennaio 2014 h 10.30–12.30

$f: A \to \mathbb{R}$ $\quad x_0 \in A$ p.d.a. per A

f è derivabile in x_0 se

- $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \in \mathbb{R}$ ovvero
- $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = 0$ ovvero
- $f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = o(x - x_0) \quad x \to x_0$
- $\boxed{f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \quad x \to x_0}$

Oss f derivabile $\Rightarrow$ f continua (in x_0!)

infatti

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \left(f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \right)$$

$$= f(x_0)$$

Teorema (Algebra delle derivate)

$f, g: A \to \mathbb{R}$ $\quad x_0 \in A$ p.d.a.

1) Se f, g derivabili in x_0 allora $(f+g)$ derivabile in x_0
e $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

2) " " " " " allora $(f \cdot g)$ derivabile in x_0
e $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) g(x_0) + f(x_0) g'(x_0)$

3) Se f derivabile in x_0 e $f(x_0) \neq 0$ allora $1/f$ derivabile in x_0 e

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{f^2(x_0)}$$

dim

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)$$
$$g(x) = g(x_0) + g'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)$$

1) $$f(x)+g(x) = f(x_0)+g(x_0) + \big(f'(x_0)+g'(x_0)\big)(x-x_0) + o(x-x_0) \quad x\to x_0$$
$$\Downarrow$$
$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0)+g'(x_0)$$

2) $$f(x)\cdot g(x) = f(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)\cdot o(x-x_0)$$
$$+\, g(x_0) f'(x_0)(x-x_0) + f'(x_0)g'(x_0)(x-x_0)^2 + f'(x_0)(x-x_0)\,o(x-x_0)$$
$$+\, o(x-x_0)\cdot g(x_0) + o(x-x_0)\cdot g'(x_0)(x-x_0) + o\big((x-x_0)^2\big)$$
$$= f(x_0)g(x_0) + \big[f(x_0)g'(x_0)+f'(x_0)\cdot g(x_0)\big](x-x_0) + o(x-x_0) \quad x\to x_0$$
$$\Downarrow$$
$$(f\cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$$

3) $f(x_0)\neq 0$ $\qquad \frac{1}{f(x)}\cdot f(x) = 1$

$$\left(\frac{1}{f}\cdot f\right)'(x_0) = 0 \overset{(*)}{\Rightarrow} \left(\frac{1}{f}\right)'(x_0)\cdot f(x_0) + \frac{1}{f(x_0)}\cdot f'(x_0) = 0$$
$$\Rightarrow \left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{f^2(x_0)}$$

Questo non è una dimostrazione: non è stato provato che $\exists \left(\frac{1}{f}\right)'(x_0)$

(*) non ho provato $\exists \left(\frac{1}{f}\right)'(x_0)$

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)}$$

essendo $f(x_0)\neq 0$ per il Teorema permanenza segno il passaggio è lecito!

$$= \frac{1}{f(x_0)}\cdot\frac{1}{1+\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}(x-x_0)+o(x-x_0)}$$
$$= \frac{1}{f(x_0)}\cdot\left(1-\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}\cdot(x-x_0)+o(x-x_0)\right)$$

$$\frac{1}{1+y} = 1-y+o(y)$$

$$= \frac{1}{f(x_0)} - \frac{f'(x_0)}{f^2(x_0)}(x-x_0) + o(x-x_0) = \frac{1}{f(x)} \quad (x \to x_0)$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{f^2(x_0)}$$

Oss

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)}{g(x_0)} + f(x_0)\cdot\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0)$$

$$= \frac{f'(x_0)}{g(x_0)} - \frac{f(x_0)\cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)} = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Teorema (derivata composizione)

$f: A \to B \quad g: B \to \mathbb{R} \qquad x_0 \in f^{-1}(f(A) \cap B)$ p.d.a.

f derivabile in x_0, g derivabile in $y_0 = f(x_0)$

$$\Longrightarrow (g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

dim (NON FATTA A LEZIONE)

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0) \qquad x \to x_0$$

$$(i) \quad f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0) \qquad x \to x_0$$

$$\Downarrow$$

$$(ii) \quad o(f(x) - f(x_0)) = o(x-x_0) \qquad x \to x_0$$

$$g(y) = g(y_0) + g'(y_0)(y-y_0) + o(y-y_0) \qquad y \to y_0$$

$\Downarrow$ posto $y = f(x)$ $\quad y_0 = f(x_0)$ e sfruttando (i) e (ii)

$$g(f(x)) = g(f(x_0)) + g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)$$

ovvero la tesi $\quad (g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$

Se f^{-1} è l'inversa di f

f derivabile in x_0 $\quad f'(x_0) \neq 0$
f^{-1} " " $f(x_0) = y_0$

allora, dalla definizione di f^{-1} cioè $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ ...

$$(f^{-1} \circ f)'(x_0) = 1$$
$$\Downarrow$$
$$(f^{-1})'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) = 1 \implies (f^{-1})'(f(x_0)) = 1/f'(x_0)$$

Analogamente, essendo $y_0 = f(x_0)$, si ha

$$(f^{-1})'(y_0) = 1/f'(f^{-1}(y_0))$$

Si ha anche, partendo da

$(f \circ f^{-1})(y) = y$, nel caso in cui $(f^{-1})'(y_0) \neq 0$

$$\Downarrow$$
$$f'(f^{-1}(y)) \cdot (f^{-1})'(y_0) = 1$$
$$\Downarrow$$
$$f'(f^{-1}(y_0)) = \frac{1}{(f^{-1})'(y_0)}$$

Il Teorema della funzioni composte può essere esteso in modo da provare il Teorema di derivazione delle funzioni inverse

Teorema (corollario derivata composizione)

$f: A \to B \quad g: B \to \mathbb{R} \quad x_0 \in \Omega = f^{-1}(f(A) \cap B)$

f derivabile in x_0 e $f'(x_0) \neq 0$

$g \circ f$ " " x_0

Allora g è derivabile in $f(x_0)$ e si ha

$$g'(f(x_0)) = \frac{(g \circ f)'(x_0)}{f'(x_0)}$$

dim

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \quad x \to x_0$$

$$\Downarrow$$

$$\text{(i)} \quad o(f(x) - f(x_0)) = o(x - x_0) \quad x \to x_0$$

$$\text{(ii)} \quad x - x_0 = \frac{f(x) - f(x_0)}{f'(x_0)} + o(x - x_0) \quad x \to x_0$$

$$(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x_0) + (g \circ f)'(x_0) \cdot (x - x_0) + o(x - x_0)$$

$$\Downarrow \text{(ii)}$$

$$g(f(x)) = g(f(x_0)) + (g \circ f)'(x_0) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{f'(x_0)} + o(x - x_0) \quad x \to x_0$$

$\Downarrow$ (i), osservando che $x \to x_0 \Rightarrow f(x) \to f(x_0)$

$$g(f(x)) = g(y_0) + \frac{(g \circ f)'(x_0)}{f'(x_0)} \cdot (f(x) - y_0) + o(f(x) - y_0) \quad f(x) \to y_0$$

$$\Downarrow$$

$$g(y) = g(y_0) + \frac{(g \circ f)'(x_0)}{f'(x_0)} \cdot (y - y_0) + o(y - y_0) \quad y \to y_0$$

ovvero la Tesi $$g'(y_0) = \frac{(g \circ f)'(x_0)}{f'(x_0)}$$

Nel caso in cui $g(y) = f^{-1}(y)$ si ha

$(g \circ f)(y) = (f^{-1} \circ f)(y) = y$ e quindi

$(g \circ f)(y)$ è certamente derivabile e dunque

Teorema (derivata funzione inversa)

$f:]a,b[\to \mathbb{R}$, f continua su $]a,b[$

f strettamente monotona su $]a,b[$

$\exists f'(x_0) \neq 0$

$\Rightarrow \exists f^{-1} : f(]a,b[) \to]a,b[$ continua e strettamente crescente e derivabile in $f(x_0)$

$$\left(f^{-1}\right)'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

dim

Segue dal Teorema precedente con $g = f^{-1}$ ↙

Esempio Proviamo che

1) $f(x) = \log x$ $\qquad f'(x_0) = 1/x_0$

2) $f(x) = \operatorname{arctg} x$ $\qquad f'(x_0) = \dfrac{1}{1+x_0^2}$

dim

1) $f(x) = \log x$

posto $g(x) = e^x$ si ha che $f(x) = g^{-1}(x)$

$g(x) = e^x$ è strettamente crescente

" è continua

$g'(x_0) = e^{x_0} > 0 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$

$$f'(x_0) = \frac{1}{g'(f(x_0))} = \frac{1}{e^{f(x_0)}} = \frac{1}{e^{\log x_0}} = \frac{1}{x_0}$$

2) $f(x) = \operatorname{arctg} x$

presa $g(x) = \operatorname{Tg} x$ per $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, g è invertibile

e si ha $g^{-1}(y) = f(y) = \operatorname{arctg} y$

$$(f \circ g)(y) = (g^{-1} \circ g)(y) = y \quad \forall y \in]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}[$$

$g(x) = \operatorname{Tg}(x)$ è continua su $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

" " strettamente crescente "

$$g'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{Tg}^2(x) \quad \forall x \in]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}[$$

$$f'(x_0) = (g^{-1})'(x_0) \overset{\downarrow}{=} \frac{1}{g'(f(x_0))} = \frac{1}{1 + \operatorname{Tg}^2(f(x_0))}$$

$$= \frac{1}{1 + \operatorname{Tg}^2(\operatorname{arctg} x_0)} = \frac{1}{1 + x_0^2}$$

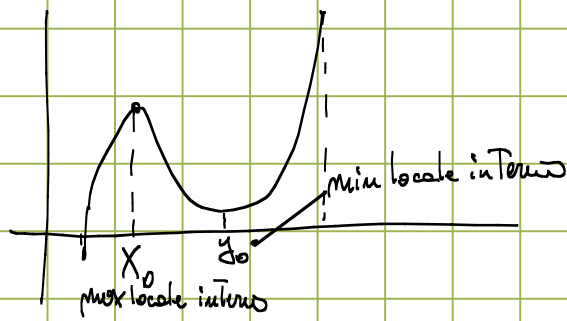
$$(g \circ f \circ h)'(x_0) = (g \circ f)'(h(x_0)) \cdot h'(x_0)$$

$$= g'(f(h(x_0))) \cdot f'(h(x_0)) \cdot h'(x_0)$$

Def $f: A \to \mathbb{R}$ $\quad x_0 \in A$

x_0 minimo locale interno se $\exists \delta > 0 : \forall x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[\subset A \quad f(x) \geq f(x_0)$

" massimo " " se " " $f(x) \leq f(x_0)$



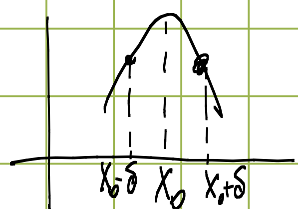
Lemma di Fermat

$f: I \to \mathbb{R}$ $\quad I$ intervallo $\quad x_0 \in I$ max (minimo) locale interno

f derivabile in x_0 $\Rightarrow f'(x_0) = 0$

dim

x_0 max locale interno



$f(x) - f(x_0) \leq 0 \quad \forall x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[\subseteq I$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0 & x_0-\delta \leq x < x_0 \\[2ex] \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0 & x_0 < x \leq x_0+\delta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_-(x_0) \geq 0 \\[2ex] \lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_+(x_0) \leq 0 \end{array}$$

ma $\exists f'(x_0) \in \mathbb{R}$

$$\Longrightarrow \quad f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = 0$$

Oss f derivabile in x_0 $\Longleftrightarrow$ esiste la retta tangente al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$ di equazione

$$r(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Teorema (Rolle)

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$

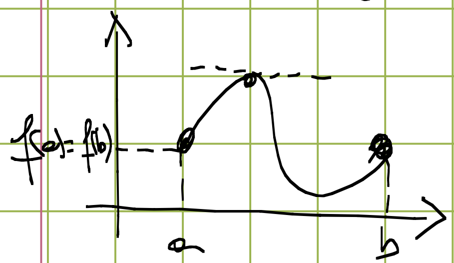
① f continua su $[a,b]$

② f derivabile su $]a,b[$

③ $f(a) = f(b)$

$$\Longrightarrow \exists\, z \in]a,b[\;:\; f'(z) = 0$$

dim



esiste z in cui la retta tangente è parallela alla retta che congiunge $(a, f(a))$ con $(b, f(b))$

Si osserva che f continua su $[a,b]$ chiuso e limitato

$\Longrightarrow$ (Weierstrass) $\exists\, m = \min f([a,b])$ $M = \max f([a,b])$

$$m \leq f(a) = f(b) \leq M$$

① caso $\quad m = M = f(a) = f(b) \Rightarrow$ la funzione è costante in $[a,b]$

$$\Rightarrow f'(x) = 0 \quad \forall x \in]a,b[\qquad \text{ok}$$

② caso $\quad m \neq M \Rightarrow$

① $m = f(a) = f(b) < M \Rightarrow x_M \in]a,b[$

② $m < f(a) = f(b) = M \Rightarrow x_m \in]a,b[$

③ $m < f(a) = f(b) < M \Rightarrow x_m, x_M \in]a,b[$

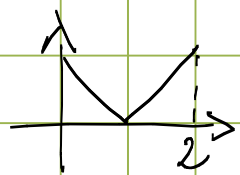
Supponiamo di essere nel caso ②, cioè il punto di minimo $x_m \in]a,b[$, dove $f(x_m) = \min f([a,b])$.

$\Rightarrow x_m$ è minimo locale interno ed $\exists f'(x_m)$ per ipotesi

$\Rightarrow$ (Lemma Fermat) $\quad f'(x_m) = 0 \quad$ ↯

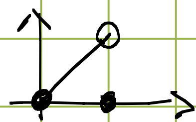
Controesempi

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & 0 \le x < 1 \\ x-1 & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$



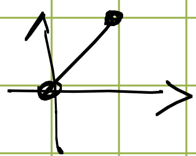
manca ②

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \le x < 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$$



manca ①

$f(x) = x \quad 0 \le x \le 1$



manca ③

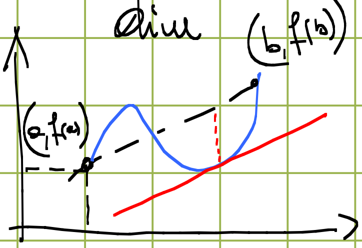
Teorema (Lagrange)

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ ① continua su $[a,b]$

② derivabile su $]a,b[$

allora $\exists z \in]a,b[\; : \; f'(z) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$

dim



"esiste un punto $z \in]a,b[$ ove la retta Tg a $(z, f(z))$ è parallela alla retta che passa per $(a, f(a))$ $(b, f(b))$"

Considero $r(x) = f(a) + \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$

è la retta che passa per $(a, f(a))$ $(b, f(b))$

Introduco

$$g(x) = f(x) - r(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

(1) g è continua su $[a,b]$

(2) g " derivabile su $]a,b[$

(3) $$g(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a) = 0$$

$$g(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) = f(b)-f(a)-f(b)+f(a) = 0$$

quindi g soddisfa le ipotesi Teorema Rolle

$$\Rightarrow \exists z \in]a,b[\ : \ g'(z) = f'(z) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$$

$$\Rightarrow \exists z \in]a,b[\ : \ f'(z) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$ ↯

Corollario

$f: I \to \mathbb{R}$ I intervallo
f derivabile su I
$f'(x) > 0 \quad \forall x \in I$ $\Rightarrow$ f è strettamente crescente su I

dice

Ts $x<y \Rightarrow f(x)<f(y)$

Considero $x,y \in I$ con $x<y$

Preso $[x,y]$, si ha f continua su $[x,y]$

f derivabile su $]x,y[$

$\Rightarrow$ (Lagrange) $\exists z \in]x,y[\; : \; f'(z) = \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$

ma per ipotesi $f'(z)>0$ e $y-x>0$ per ipotesi

$\Rightarrow f(y)-f(x)>0 \Rightarrow f(y)>f(x)$ ✓

OSS: questo corollario del Teorema di Lagrange permette, per le funzioni derivabili, di scrivere

$\{x\in[a,b] : f(x) \text{ crescente strettamente}\} \supseteq \{x\in[a,b] : f'(x)>0\}$

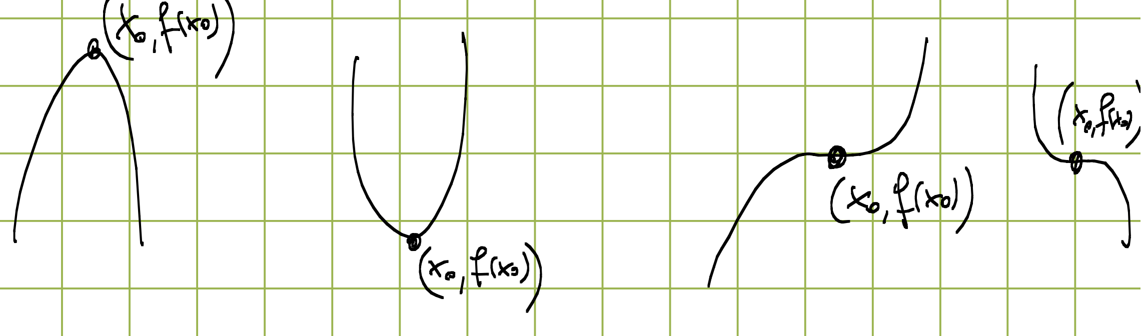
Attenzione: f crescente $\overset{\text{in } I}{\not\Rightarrow}$ $f'(x)>0 \quad \forall x \in I$

infatti $f(x)=x^3$ è strettamente crescente su $\mathbb{R}$

però $f'=3x^2$ e quindi $f'(0)=0$

Def $f: A \to \mathbb{R}$ $\quad x_0 \in A$ p.d.a.

x_0 è stazionario per f se $f'(x_0)=0$



Teorema

$f: I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ punto stazionario per f,

f derivabile su I

① $\exists \delta > 0$: $f'(x) \begin{cases} > 0 & x \in]x_0-\delta, x_0[\\ < 0 & x \in]x_0, x_0+\delta[\end{cases} \Rightarrow x_0$ p.to max locale interno

② $\exists \delta > 0$: $f'(x) \begin{cases} < 0 & x \in]x_0-\delta, x_0[\\ > 0 & x \in]x_0, x_0+\delta[\end{cases} \Rightarrow x_0$ p.to min. locale interno

③ $\exists \delta > 0$: $f'(x)$ non cambia segno in $]x_0-\delta, x_0+\delta[$

$\Rightarrow x_0$ non è né min né max locale interno

Oss

$f''(x_0) > 0$ con $f'(x_0) = 0 \Rightarrow f'(x)$ è crescente e $f'(x_0) = 0$

$$\Rightarrow f' \begin{cases} < 0 & x < x_0 \\ > 0 & x > x_0 \end{cases}$$

$f''(x_0) < 0$ con $f'(x_0) = 0 \Rightarrow f'$ è decrescente e $f'(x_0) = 0$

$$\Rightarrow f' \begin{cases} > 0 & x < x_0 \\ < 0 & x > x_0 \end{cases}$$

Teorema

$f: I \to \mathbb{R}$ $x_0 \in I$ stazionario $(f'(x_0) = 0)$

f derivabile due volte in I

① $f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ è punto di min locale interno

② $f''(x_0) < 0 \Rightarrow$ " " " " max " "