Lezione — Analisi Matematica 1 — gennaio 2014

Funzioni Lipschitziane e Uniformemente Continue

Def (Funzione Lipschitziana)

Data $f: A \to \mathbb{R}$, questa funzione si dice "Lipschitziana" (o L-Lipschitziana) se $\exists\, L > 0$: $|f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x-y| \quad \forall x, y \in A$

Oss: ① L'essere Lipschitziana è un concetto di natura globale: la costante può cambiare al cambiare dell'insieme A, ma non dipende dal punto.

② Se f è Lipschitziana in A di costante L, allora è Lipschitziana $\forall\, M \geq L$ (ovvio!)

Esempio: la funzione $f(x) = 5x - 3$ è 5-Lipschitziana su tutto $\mathbb{R}$. Infatti

$$|f(x) - f(y)| = |5x - 3 - 5y + 3| = 5 \cdot |x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

e dunque la disuguaglianza vale (è qui una uguaglianza).

Teorema (Lipschitzianità $\Rightarrow$ Continuità)

Se $f: A \to \mathbb{R}$ è Lipschitziana di costante $L > 0$ allora f è continua $\forall x \in A$

dim

Si prende $x_0 \in A$. Per la lipschitzianità di f si ha che

$$\forall x \in A \quad |f(x) - f(x_0)| \leq L \cdot |x - x_0|$$

e quindi se $|x - x_0| < \varepsilon / L = \delta$ allora $|f(x) - f(x_0)| \leq L \cdot |x - x_0| < \cancel{L} \cdot \varepsilon / \cancel{L} = \varepsilon$

Ne segue la Tesi, ovvero

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta = \frac{\varepsilon}{L} : x \in A \cap\,]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\ \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Oss: si osservi che nel Teorema precedente $\delta = \delta(\varepsilon)$, ovvero non si cambia al cambiare del punto x_0.

Controesempio (f continua $\not\Rightarrow$ f lipschitziana)

Proviamo che la funzione $f(x) = 1/x$ su $(0,1]$ è continua ma non è lipschitziana

dim

Che la funzione $1/x$ sia continua in $(0,1]$ è noto.

Proviamo che $1/x$ non è lipschitziana in $(0,1]$: a tal fine proveremo che

$$\forall M>0 \quad \exists x_M, y_M \in (0,1] \text{ t.c. } \left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| > M$$

La funzione $f(x) = 1/x \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$, dunque si dovranno prendere x_M, y_M molto vicini tra loro in prossimità di 0.

Prendiamo $x_n = 1/n \quad y_n = 1/n - \frac{1}{n^2} = \frac{n-1}{n^2}$

$$f(x_n) = n \quad f(y_n) = \frac{n^2}{n-1}$$

$$a_n = \left|\frac{f(x_n)-f(y_n)}{x_n-y_n}\right| = \left|\frac{n-\frac{n^2}{n-1}}{1/n^2}\right| = \left|\frac{\cancel{n^2}-n-\cancel{n^2}}{n-1}\cdot n^2\right| = \frac{n^3}{n-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

e dunque

$$\forall M>0 \ \exists \bar{n}>0 : \forall n>\bar{n} \quad a_n > M$$

cioè la tesi $\lightning$

Def (Uniforme Continuità)

Data $f: A \to \mathbb{R}$, questa si dice "Uniformemente continua" su A se

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta=\delta(\varepsilon)>0 : \forall x,y \in A \quad |x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$$

Oss: ① molto importante : $\delta=\delta(\varepsilon)$, ovvero non dipende dal punto x_0

② l'uniforme continuità è un concetto globale, ovvero non dipende dal punto $x_0 \in A$ scelto

E' importante stabilire in che relazione sta l'uniforme continuità con la lipschitzianità e con la continuità.

Teorema (f lipschitziana $\Rightarrow$ f uniformemente continua)

Se $f: A \to \mathbb{R}$ è lipschitziana di costante L

allora f è uniformemente continua su A

dim

Per ipotesi $\exists L>0 : |f(x)-f(y)| \leq L|x-y| \quad \forall x,y \in A$

Devo provare che $\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 : \forall x,y \in A \ |x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$

Prendo $\delta = \varepsilon/L$: con questa scelta

$$|f(x)-f(y)| \leq L \cdot |x-y| < L \cdot \varepsilon/L = \varepsilon$$

e dunque

$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 : \forall x,y \in A \quad |x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$

Oss: il viceversa non vale. Proveremo più avanti che la funzione $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ $f(x)=\sqrt{x}$ risulta uniformemente continua ma non lipschitziana

Teorema (f uniformemente continua $\Rightarrow$ f continua)

Se $f: A \to \mathbb{R}$ è uniformemente continua su A

allora f è continua su A

dim

non dipende dal punto

Per ipotesi $\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta=\delta(\varepsilon)>0 : \forall x,y \in A \quad |x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$

Fisso $x_0 \in A$ in modo qualsiasi: dall'ipotesi segue che

$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta=\delta(\varepsilon) \quad \forall x \in A \quad |x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

non dipende da x_0 che equivale a scrivere

f continua nel punto x_0

Non vale il viceversa del Teorema precedente, ovvero una funzione continua non è detto sia uniformemente continua

Controesempio (f continua $\not\Rightarrow$ f uniformemente continua)

Proviamo che $f(x)=x^2$ su $[0,+\infty[$ risulta

- continua $\forall x \in [0,+\infty[$
- non uniformemente continua su $[0,+\infty[$

dim

Che la funzione sia continua $\forall x \in [0,+\infty[$ era noto (x^2 è un polinomio!)

Per provare che non è uniformemente continua debbo provare

$$\exists \varepsilon_0>0\ \forall \delta>0\ \exists x_\delta, y_\delta \in [0,+\infty[\ |x_\delta-y_\delta|<\delta \text{ e } |f(x_\delta)-f(y_\delta)|<\varepsilon$$

Fissiamo $\varepsilon_0=2$ e consideriamo $x_n=n$ $y_n=n+1/n$

Comunque si fissi $\delta>0$, preso $n>1/\delta$ si ha $|x_n-y_n|=1/n<\delta$

Inoltre

$$|f(x_n)-f(y_n)| = |n^2-(n+1/n)^2| = |\cancel{n^2}-\cancel{n^2}+2+1/n^2| = |2+1/n^2| \geq 2$$

Abbiamo dunque provato che

$$\exists \varepsilon_0=2 : \forall \delta>0\ \exists \bar{n} : x_{\bar{n}}, y_{\bar{n}} \in [0,+\infty[\ |\underset{x_{\bar n}=\bar n}{x_{\bar{n}}}-\underset{y_{\bar n}=\bar n+\frac{1}{\bar n}}{y_{\bar{n}}}|<\delta \text{ e } |f(x_{\bar{n}})-f(y_{\bar{n}})|\geq 2$$

e dunque la funzione $f(x)=x^2$ <u>non</u> è uniformemente continua su $[0,+\infty[$ $\quad$ c.v.d.

Oss: per provare nell'esempio precedente che f non è uniformemente continua ho sfruttato il fatto che $[0,+\infty[$ è illimitato.

Ma prendere l'intervallo limitato non basta

Esempio ($f = 1/x$ non è uniformemente continua su $(0,1]$)

Proviamo che $f(x) = 1/x$ non è uniformemente continua su $(0,1]$

dim

Tesi $\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \delta > 0 \ \exists x_\delta, y_\delta \in (0,1] \quad |x_\delta - y_\delta| < \delta$ e $\left|\frac{1}{x_\delta} - \frac{1}{y_\delta}\right| \geq \varepsilon_0$

Fisso $\varepsilon_0 = 1$: in corrispondenza a $\forall \delta > 0, \exists \bar{m} \geq 1 : \frac{1}{2\bar{m}} < \delta$

e scegliendo $x_{\bar{m}} = \frac{1}{\bar{m}} \quad y_{\bar{m}} = \frac{1}{2\bar{m}}$ si ha

$$|x_m - y_m| = \left|\frac{1}{\bar{m}} - \frac{1}{2\bar{m}}\right| = \frac{1}{2\bar{m}} < \delta \quad \text{e} \quad \left|\frac{1}{1/\bar{m}} - \frac{1}{1/2\bar{m}}\right| = |\bar{m} - 2\bar{m}| = \bar{m} \geq 1$$

Quindi abbiamo provato che

$$\exists \varepsilon_0 = 1 : \forall \delta > 0 \ \exists \bar{m} \geq 1 : \bar{m} > \frac{1}{2\delta} \quad |\underbrace{x_{\bar{m}}}_{x_{\bar{m}} = \frac{1}{\bar{m}}} - \underbrace{y_{\bar{m}}}_{y_{\bar{m}} = \frac{1}{2\bar{m}}}| < \delta \ \text{e} \ \left|\underbrace{\frac{1}{x_{\bar{m}}}}_{\bar{m}} - \underbrace{\frac{1}{y_{\bar{m}}}}_{2\bar{m}}\right| = \bar{m} \geq 1 \quad \lightning$$

Riassumendo, per avere $f : I \to \mathbb{R}$ uniformemente continua

- non voglio intervalli illimitati
- " " funzioni illimitate su I
- voglio una funzione continua su I

Presentiamo ora una condizione sufficiente utilizzando le stesse ipotesi del Teorema di Weierstrass

Teorema (Heine Cantor)

Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua $\forall x \in [a,b]$ intervallo chiuso e limitato allora f è uniformemente continua su $[a,b]$

dim

xassurdo f non sia uniformemente continua, ovvero

$$\exists \varepsilon_0 > \ \forall \delta > 0 \ \exists x_\delta, y_\delta \in [a,b] \quad |x_\delta - y_\delta| < \delta \ \text{e} \ |f(x_\delta) - f(y_\delta)| \geq \varepsilon_0$$

$$\Downarrow \text{ prendendo } \delta = 1/m$$

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \ \forall m \geq 1 \ \exists x_m, y_m \in [a,b] \quad |x_m - y_m| < 1/m \ \text{e} \ |f(x_m) - f(y_m)| \geq \varepsilon_0$$

Adesso osservo che $a \leq y_m \leq b \ \forall m$

$\Rightarrow$ (Teorema Bolzano Weierstrass) $\exists \{y_{k_m}\}_m$ convergente a $\ell \in [a,b]$

$\Rightarrow \forall m \quad -\frac{1}{k_m} < x_{k_m} - y_{k_m} < \frac{1}{k_m}$ dove $k_m \geq m$

$$\Rightarrow \forall m \quad \underbrace{y_{k_m} - \frac{1}{k_m}}_{\substack{\downarrow m \to \infty \\ \ell}} < x_{k_m} < \underbrace{y_{k_m} + \frac{1}{k_m}}_{\substack{\downarrow m \to \infty \\ \ell}}$$

$\Rightarrow$ (Teorema 2 Carabinieri) $x_{k_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$

Dunque abbiamo $|x_{k_n} - y_{k_n}| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. Per la continuità di f in ℓ

$\lim_{n \to +\infty} f(x_{k_n}) = f(\ell) = \lim_{n \to +\infty} f(y_{k_n})$, e dunque

$$\lim_{n \to +\infty} |f(x_{k_n}) - f(y_{k_n})| = 0$$

Ma questo è ASSURDO: in corrispondenza ad un $\forall \bar{n}$ devono esistere $x_{k_{\bar{n}}}, y_{k_{\bar{n}}}$: $|x_{k_{\bar{n}}} - y_{k_{\bar{n}}}| < 1/\bar{n}$ e $|f(x_{k_n}) - f(y_{k_n})| \geq \varepsilon_0$

Ne segue che f è uniformemente continua. $\not\downarrow$

Controesempio (f uniformemente continua $\not\Rightarrow$ f lipschitziana)

Proviamo che $f(x) = \sqrt{x}$

- è uniformemente continua su $[0,1]$
- non è lipschitziana su $[0,1]$

dim

$f(x) = \sqrt{x}$ è continua su $[0,1]$, e quindi è pure uniformemente continua (Teorema Heine Cantor) su $[0,1]$, intervallo chiuso e limitato.

Proviamo ora che esistono $\{x_n\}_n$ $\{y_n\} \subseteq [0,1]$

t.c. $a_n = \left| \dfrac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n} \right| \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

Presi $x_n = 4/n^2$ $y_n = 1/n^2$ si ha

$$a_n = \left| \frac{\sqrt{4/n^2} - \sqrt{1/n^2}}{4/n^2 - 1/n^2} \right| = \left| \frac{1/n}{3/n^2} \right| = \frac{n}{3} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$$

e quindi $\forall M > 0$ $\exists \bar{n}$: $\forall n > \bar{n}$ $a_n > M$

Ne segue che f non può essere lipschitziana $\not\downarrow$

Lipschitzianità e derivata prima

Quale è il legame tra la costante di Lipschitz e la derivata prima?

Dire che f è Lipschitziana su $[a,b]$ con costante di Lipschitz L significa

$$\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-x|} \leq L \quad \forall x,y \in [a,b] \quad x \neq y$$

ovvero il rapporto incrementale è limitato.

Controesempio (f Lipschitziana $\not\Rightarrow$ f derivabile)

$f(x)=|x|$ è lipschitziana su $\mathbb{R}$ con costante 1, però non è derivabile su $\mathbb{R}$ (in $x=0$ non è derivabile)

Neppure il viceversa vale

Controesempio (f derivabile $\not\Rightarrow$ f lipschitziana)

$f(x)=1/x$ è derivabile su $]0,1[$

" non è lipschitziana su $]0,1[$.

Teorema (f derivabile su $[a,b] \Rightarrow f$ lipschitziana su $[a,b]$)

Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ è derivabile con f' continua su $[a,b]$ allora f è lipschitziana su $[a,b]$ con costante

$$L = \max |f'|([a,b])$$

dim

Presi comunque $x,y\in[a,b]$, $x\neq y$, si ha (Teorema Lagrange)

$$|f(x)-f(y)| = |f'(z)\cdot(x-y)| \quad z \text{ compreso tra } x \text{ ed } y$$

$$= |f'(z)|\cdot|x-y|$$

$$\overset{\text{vale il Thm. Weierstrass per } f'}{\leq} \max|f'|\cdot([a,b])\cdot|x-y|$$

Oss: per garantire la lipschitzianità basta supporre che

- f sia derivabile $\forall x\in I$
- $|f'|(x)\leq C \quad \forall x\in I$

Anche in questo caso $L=\sup|f'|(I)$ e si ha $L\leq C$

Complementi di teoria

Oss (f continua su $I \not\Rightarrow \exists \lim_{x\to\inf I} f(x)$ o $\exists \lim_{x\to\sup I}$)

Data f continua su $]a,b[$, non è detto che esistano i limiti per $x\to a^+$ o $x\to b^-$

- $f:]0,1] \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \operatorname{sen} 1/x$ è continua su $]0,1]$ ma $\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen} 1/x \underset{y=1/x}{=} \lim_{y\to+\infty} \operatorname{sen} y$ non esiste (già verificato!)

- $f: [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x \operatorname{sen} x$ è continua su $[0,+\infty[$ ma $\lim_{x\to+\infty} x \operatorname{sen} x$ non esiste (Esercizio!)

Per le funzioni uniformemente continue su intervalli limitati vale il seguente risultato

Teorema (estensione delle funzioni uniformemente continue)

Se $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ è uniformemente continua con $a,b\in\mathbb{R}$, allora $\exists \lim_{x\to a^+} f(x)$ $\exists \lim_{x\to b^-} f(x)$ finiti

dim

Proviamo che $\exists \lim_{x\to a^+} f(x)$ (il caso $x\to b^-$ è analogo)

Per ipotesi

$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0$ t.c. $\forall x,y\in]a,b[$ $\quad |x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$

$\Downarrow$

$\forall \varepsilon>0\ \exists\delta>0 : \ x,y\in]a,a+\delta[\Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$

$\Downarrow$ Vedi Teorema che segue

$\exists \lim_{x\to a^+} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ $\qquad \swarrow$

Teorema (segue da Teorema Cauchy + Teorema limiti funzioni vs limiti successioni)

Sia $f: A\to\mathbb{R}$, sia x_0 p.d.a. per A. Sono tra loro equivalenti

(i) $\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = \ell\in\mathbb{R}$

(ii) $\forall\varepsilon>0\ \exists V\in\mathcal{I}_{x_0}: \ x,y\in A\cap(V\setminus\{x_0\}) \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$

dim

(i) $\Rightarrow$ (ii) $\quad \forall\varepsilon>0\ \exists V\in\mathcal{I}_{x_0}$ $\quad x\in A\cap(V\setminus\{x_0\}) \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon$

$\qquad\qquad\qquad$ " $\quad$ " $\qquad y\in$ " $\qquad \Rightarrow |f(y)-\ell|<\varepsilon$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists V\in \mathcal{I}_{x_0}: x,y\in A\cap(V\setminus\{x_0\}) \Rightarrow |f(x)-f(y)-l+l| \le$$
$$\le |f(x)-l|+|f(y)-l|<2\varepsilon$$

che equivale a (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (i)

Primo passo $\forall \{x_n\}\subseteq A\setminus\{x_0\}$, $x_n\to x_0 \Rightarrow \{f(x_n)\}_n$ è di Cauchy

vale la (ii) $\forall\varepsilon>0\ \exists V\in\mathcal{I}_{x_0}\ x,y\in A\cap(V\setminus\{x_0\}) \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$

$x_n\to x_0\quad \forall V\in\mathcal{I}_{x_0}\ \exists\bar n: \forall n>\bar n\quad x_n\in V$

$$\Downarrow$$

$$\forall\varepsilon>0\ \exists V\in\mathcal{I}_{x_0}\ \exists\bar n\ \forall n,m>\bar n\quad x_n,x_m\in(A\setminus\{x_0\})\cap V \Rightarrow |f(x_n)-f(x_m)|<\varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$\forall\{x_n\}\subset A\setminus\{x_0\}\ x_n\to x_0 \Rightarrow \{f(x_n)\}_n \text{ è di Cauchy}$$

$$\Downarrow$$

$$\exists \lim_{n\to+\infty} f(x_n)=l\in\mathbb{R}$$

Secondo passo: $\forall\{x_n\}\subseteq A\setminus\{x_0\}: x_n\to x_0\quad f(x_n)\xrightarrow[n\to\infty]{} l$

(l non dipende da $\{x_n\}$!!!)

Consideriamo due successioni $\{x_n\}_n, \{y_n\}_n\subseteq A\setminus\{x_0\}$ con

$x_n\to x_0$ e $y_n\to x_0$

La successione $\{f(x_n)\}$ è di Cauchy per il punto (i) e dunque $f(x_n)\to l$

Consideriamo la nuova successione $\{z_n\}_n$ così definita

$z_{2n}=x_n$ e $z_{2n+1}=y_n$

Questa nuova successione, per costruzione, soddisfa

$\{z_n\}\subseteq A\setminus\{x_0\}$ e $z_n\to x_0$

e dunque per il punto (i) $\{f(z_n)\}_n$ è di Cauchy

Ma una successione $\{f(z_n)\}$ di Cauchy, che contiene una sottosuccessione $\{f(z_{2n})\}_n$ t.c. $f(z_{2n})=f(x_n)\to l$, converge pure a l ovvero $f(z_n)\to l$.

Dunque $\{f(z_{2n+1})\}_n=\{f(y_n)\}_n$, essendo una sottosuccessione di $\{f(z_n)\}_n$, deve convergere anch'essa a l ovvero $f(z_{2n+1})=f(y_n)\to l$.

Abbiamo provato che il limite l non dipende dalla successione scelta. Quindi si è provato che

$\forall\{x_n\}_n\subseteq A\setminus\{x_0\}\ [x_n\to x_0 \Rightarrow f(x_n)\to l]$, ovvero $\lim_{x\to x_0} f(x)=l$ $\not{y}$