

Funzioni Lipschitziane e Uniformemente Continue

Def (Funzione Lipschitziana)

Dato $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, questa funzione si dice "Lipschitziana" (o L -Lipschitziana)

se $\exists L > 0 : |f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y| \quad \forall x, y \in A$

Oss: ① L'essere Lipschitziano è un concetto di natura globale: la costante può cambiare al cambiare dell'insieme A , ma non dipende dal punto

② Se f è Lipschitziana in A di costante L allora è Lipschitziana $\forall M \geq L$ (ovvio!)

Esempio $f(x) = 5x - 3$ è Lipschitziana su $\mathbb{R}$
con costante $\boxed{5 = L}$
infatti

$$|f(x) - f(y)| = |5x - 3 - (5y - 3)| = |5x - 5y| = 5|x - y|$$

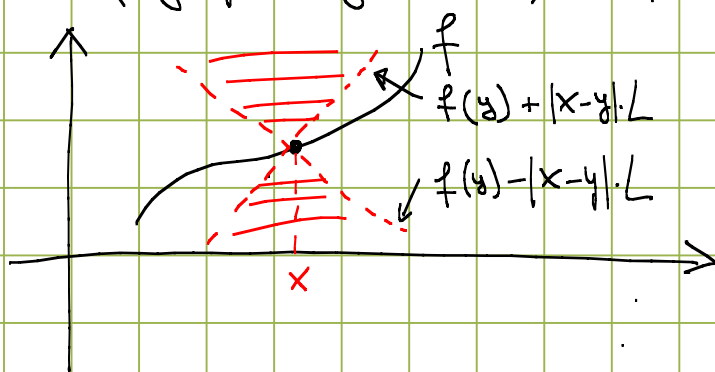
$\Downarrow$

$$|f(x) - f(y)| \leq 5|x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$\Downarrow$

$$\left(|f(x) - f(y)| \leq 2\pi \cdot |x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad \text{in quanto } 2\pi > 5! \right)$$

Oss: (significato geometrico) $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitziana



la zona tratteggiata
è interdotta al
grafico di f

dalla definizione

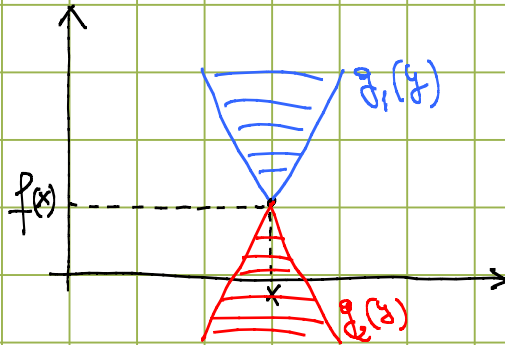
$$|f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y|$$



$$-L \cdot |x - y| \leq f(x) - f(y) \leq L \cdot |x - y|$$



$$g_2(x) = f(y) - L \cdot |x - y| \leq f(x) \leq f(y) + L \cdot |x - y| = g_1(x)$$



Teorema (Lipschitzianità $\Rightarrow$ Continuità)

Se $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ è Lipschitziana di costante $L > 0$
allora f è continua $\forall x_0 \in A$

dim.

Si prende $x_0 \in A$. Per la Lipschitzianità di f si ha che

$$\forall x \in A \quad |f(x) - f(x_0)| \leq L \cdot |x - x_0| \quad \text{segue dalla Lipschitzianità}$$

e quindi se $|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{L} = \delta$ allora $|f(x) - f(x_0)| \leq L \cdot |x - x_0| < L \cdot \frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon$

Ne segue la tesi, ovvero

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \frac{\varepsilon}{L} > 0: \quad x \in A \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \checkmark$$

Oss: si osserva che nel Teorema precedente $\delta = \delta(\varepsilon)$, ovvero non va cambiato al cambiare del punto x_0 .

Esempio (funzione continua ma non Lipschitziana)

non è vero ($\exists L > 0: |f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \forall x, y \in A$)



$$\forall L > 0 \quad \exists x_L, y_L \in A: |f(x_L) - f(y_L)| > L|x_L - y_L|$$



$$\forall L > 0 \quad \exists x_L \neq y_L \in A: \left| \frac{f(x_L) - f(y_L)}{x_L - y_L} \right| > L$$



$$\sup_{\substack{x, y \in A \\ x \neq y}} \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| = +\infty$$

Controesempio (f continua $\nRightarrow f$ Lipschitziana)

Proviamo che la funzione $f(x) = 1/x$ su $(0,1]$ è continua ma non è Lipschitziana
dici

Che la funzione $1/x$ sia continua in $(0,1]$ è noto.

Proviamo che $1/x$ non è Lipschitziana in $(0,1]$: a tal fine proveremo che

$$\rightarrow \forall M > 0 \quad \exists x_n, y_n \in (0,1] \text{ t.c. } \left| \frac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n} \right| > M$$

La funzione $f(x) = 1/x \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$, dunque ci dovremo prendere x_n, y_n molto vicini tra loro in prossimità di 0.

$$\text{Prendiamo } x_n = \frac{1}{n} \quad y_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} = \frac{n-1}{n^2}$$

$$f(x_n) = n \quad f(y_n) = \frac{n^2}{n-1}$$



$$Q_n = \left| \frac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n} \right| = \left| \frac{n - \frac{n^2}{n-1}}{1/n^2} \right| = \left| \frac{n - n - \frac{n}{n-1}}{1/n^2} \right| = \left| \frac{-\frac{n}{n-1}}{1/n^2} \right| = \frac{n^3}{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

e dunque

$$\forall M > 0 \quad \exists \bar{n} > 0 : \forall n > \bar{n} \quad Q_n > M$$

cioè la tesi $\downarrow$

Oss: $f(x) = 1/x$ è derivabile su $(0,1]$ e si ha

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \quad |f'(x)| = \frac{1}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$$

$$\forall M > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x \in (0,1] \quad 0 < x_0 < \delta \Rightarrow |f'(x)| > M$$

$$\text{" " " } 0 < x_0 < \delta \Rightarrow \left| \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| > M$$

$$\Downarrow \\ \forall M > 0 \quad \exists \bar{\delta} > 0 : \forall x \in (0,1] \quad 0 < x < \bar{\delta} \Rightarrow \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| > M$$

$\downarrow$

Esercizio: Calcolare la costante di Lipschitz (o L)

della funzione $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = x^2 + 2$
dim

La mia funzione f è derivabile con derivata

$$f'(x) = 2x$$

e f' è continua su $[0, 2]$

Per il Teorema di Lagrange applicato a $[x, y] \subseteq [0, 2]$

$$f(x) - f(y) = f'(z) \cdot (x - y) \quad \text{dove } z \in]x, y[$$

$\Downarrow$

$$|f(x) - f(y)| = |f'(z)| \cdot |x - y| \leq \underbrace{\left\{ \sup_{[0, 2]} f' \right\}}_{L} \cdot |x - y|$$

$\Downarrow$

$$|f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y| \quad \forall x, y \in [0, 2]$$

Il che essendo $f' = 2x$ continua su $[0, 2]$, per il Teorema di Weierstrass

$$L = \max_{[0, 2]} f' = f'(2) = 4 \quad \text{poiché } f' \text{ è crescente}$$

Il che allora $f = x^2 + 2$ è Lipschitziana di costante

$$L = 4 \quad \text{su } [0, 2] \quad \checkmark$$

Obs se "restringo" l'intervallo, la costante diminuisce
"allargo" " " " " aumenta

Def (Uniforme Continuità) (è un concetto globale)

Dato $f: A \rightarrow \mathbb{R}$; questa si dice "Uniformemente continua" su A se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x, y \in A \quad |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Oss: ① molto importante: $\delta = \delta(\varepsilon)$, ovvero non dipende dal punto x_0

② l'uniforme continuità è un concetto globale, ovvero non dipende dal punto $x_0 \in A$ scelto

Scelette Lipschitz $\Rightarrow$ U.C. $\Rightarrow$ Continua
 $\Leftarrow$ $\Leftarrow$

È importante stabilire in che relazione sta l'uniforme continuità con la Lipschitzianità e con la continuità.

Teorema (f lipschitziana $\Rightarrow f$ uniformemente continua)

Se $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ è lipschitziana di costante L

allora f è uniformemente continua su A

dimi

Per ipotesi $\exists L > 0 : |f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \forall x, y \in A$

Devo provare che $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x, y \in A \quad |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Prendo $\delta = \varepsilon/L$: con questa scelta

$$|f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y| < L \cdot \frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon$$

e dunque

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x, y \in A \quad |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \checkmark$$

Oss: il viceversa non vale. Provaremo più avanti che la funzione $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \sqrt{x}$ risulta uniformemente continua ma non lipschitziana

Proviamo che uniformemente continuo $\Rightarrow$ continuo

Teorema (f uniformemente continua $\Rightarrow f$ continua)

Se $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ è uniformemente continua su A

allora f è continua su A

dimi

$\uparrow$ non dipende dal punto

Per ipotesi $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x, y \in A \quad |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Fisso $x_0 \in A$ in modo qualsiasi : dall'ipotesi segue che

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) \quad \forall x \in A \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$\uparrow$ non dipende da x_0

che equivale a scrivere

f continua nel punto x_0 $\checkmark$

Non vale il viceversa del Teorema precedente, ovvero una funzione continua non è detto sia uniformemente continua

Controesempio (f continua $\not\Rightarrow f$ uniformemente continua)

Proviamo che $f(x) = x^2$ su $[0, +\infty[$ risulta

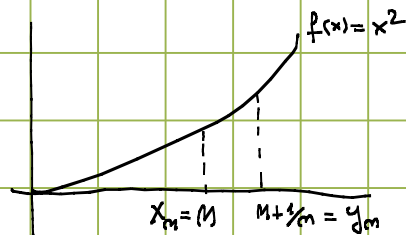
- continua $\forall x \in [0, +\infty[$

- non uniformemente continua su $[0, +\infty[$
dici

Che la funzione sia continua $\forall x \in [0, +\infty[$ era noto (x^2 è un polinomio!)

Per provare che non è uniformemente continua debbo provare

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \forall \delta > 0 \exists x_\delta, y_\delta \in [0, +\infty[\quad |x_\delta - y_\delta| < \delta \text{ e } |f(x_\delta) - f(y_\delta)| < \varepsilon$$



$$|x_m - y_m| = \frac{1}{m}$$

$$\begin{aligned} |f(x_m) - f(y_m)| &= \left| m^2 - \left(m + \frac{1}{m} \right)^2 \right| = \\ &= \left| -\frac{1}{m^2} - 2 \right| > 2 \quad \forall m \geq 1 \end{aligned}$$

$$\exists \varepsilon_0 = 2 : \forall \delta > 0 \exists m : \frac{1}{m} < \delta \quad \exists x_m, y_m \in [0, +\infty[: |x_m - y_m| < \frac{1}{m} < \delta$$
$$\text{e } |f(x_m) - f(y_m)| > 2$$

Fissiamo $\varepsilon_0 = 2$ e consideriamo $x_m = m$ $y_m = m + \frac{1}{m}$

Comunque mi fidi $\delta > 0$, preso $m > \frac{1}{\delta}$ si ha $|x_m - y_m| = \frac{1}{m} < \delta$

Inoltre

$$|f(x_m) - f(y_m)| = \left| m^2 - \left(m + \frac{1}{m} \right)^2 \right| = \left| m^2 - m^2 - 2 + \frac{1}{m^2} \right|$$

$$= \left| 2 + \frac{1}{m^2} \right| > 2$$

Abbiamo dunque provato che

$$\exists \varepsilon_0 = 2 : \forall \delta > 0 \exists \bar{m} : x_{\bar{m}}, y_{\bar{m}} \in [0, +\infty[\quad |x_{\bar{m}} - y_{\bar{m}}| < \delta \text{ e } |f(x_{\bar{m}}) - f(y_{\bar{m}})| \geq 2$$

e dunque la funzione $f(x) = x^2$ non è uniformemente continua su $[0, +\infty[$

Oss: per provare nell'esempio precedente che f non è uniformemente continua ho sfruttato il fatto che $[0, +\infty[$ è illimitato.

Ma prendere l'intervallo limitato non basta.

Esempio ($f = 1/x$ non è uniformemente continua su $(0,1]$)

Proviamo che $f(x) = 1/x$ non è uniformemente continua su $(0,1]$
dimo.

Teri $\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \delta > 0 \exists x_\delta, y_\delta \in (0,1] \quad |x_\delta - y_\delta| < \delta \text{ e } \left| \frac{1}{x_\delta} - \frac{1}{y_\delta} \right| \geq \varepsilon_0$

Fisso $\varepsilon_0 = 1$: in corrispondenza a $\forall \delta > 0, \exists \bar{n} > 1 : \frac{1}{2\bar{n}} < \delta$

e scegliendo $x_{\bar{n}} = \frac{1}{\bar{n}} \quad y_{\bar{n}} = \frac{1}{2\bar{n}}$ si ha

$$|x_{\bar{n}} - y_{\bar{n}}| = \left| \frac{1}{\bar{n}} - \frac{1}{2\bar{n}} \right| = \frac{1}{2\bar{n}} < \delta \quad \text{e} \quad \left| \frac{1}{x_{\bar{n}}} - \frac{1}{y_{\bar{n}}} \right| = |\bar{n} - 2\bar{n}| = \bar{n} \geq 1$$

Quindi abbiamo provato che

$$\exists \varepsilon_0 = 1 : \forall \delta > 0 \exists \bar{n} > 1 : \bar{n} > \frac{1}{2\delta} \quad |x_{\bar{n}} - y_{\bar{n}}| < \delta \text{ e } \left| \frac{1}{x_{\bar{n}}} - \frac{1}{y_{\bar{n}}} \right| = \bar{n} > 1$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 $x_{\bar{n}} = \frac{1}{\bar{n}} \quad y_{\bar{n}} = \frac{1}{2\bar{n}} \quad \frac{1}{\bar{n}} \quad \frac{1}{2\bar{n}}$

Riassumendo, per avere $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ uniformemente continua
- non voglio intervalli illimitati

- " " funzioni illimitate su I

- voglio una funzione continua su I

Prendiamo ora una condizione sufficiente utilizzando
le stesse ipotesi del Teorema di Weierstrass

Teorema (Heine Cantor)

Se $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua $\forall x \in [a,b]$ intervallo chiuso e limitato
allora f è uniformemente continua su $[a,b]$
dimo.

Per assurdo f non è uniformemente continua su $[a,b]$

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \exists x_\delta, y_\delta \in [a,b] \quad |x_\delta - y_\delta| < \delta \text{ e } |f(x_\delta) - f(y_\delta)| \geq \varepsilon$$

$\Downarrow$

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall n > 0 \exists x_n, y_n \in [a,b] \quad |x_n - y_n| < \frac{1}{n} \text{ e } |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$$

$\{y_n\}_n \subseteq [a,b]$ è una successione in $[a,b]$

$\Rightarrow \{y_n\}_n$ è limitata $\Rightarrow$ Bolzano Weierstrass $\exists \{y_{k_n}\}_n$
sottosuccessione convergente a $\bar{x}$
($y_{k_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \bar{x}$)

$$\forall \epsilon \quad |x_n - y_n| < \frac{1}{n} \Rightarrow -\frac{1}{n} < x_n - y_n < \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow y_n - \frac{1}{n} < x_n < y_n + \frac{1}{n} \quad \forall n$$

$$\Rightarrow \underbrace{y_{k_n} - \frac{1}{k_n}}_{\substack{\downarrow \\ n \rightarrow +\infty \\ \bar{x}}} < x_{k_n} < \underbrace{y_{k_n} + \frac{1}{k_n}}_{\substack{\downarrow \\ \bar{x}}} \quad \forall n$$

(infatti k_n è una funzione stricte. crescente $\Rightarrow k_n \geq n \quad \forall n$!)

$$\Rightarrow \text{Teorema Cauchy} \quad x_{k_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \bar{x}$$

$$\text{Dunque } x_{k_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \bar{x}, y_{k_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \bar{x} \Rightarrow \overset{\text{f continua}}{f(x_{k_n}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(\bar{x})}$$

$$f(y_{k_n}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(\bar{x})$$

$$\Rightarrow |f(x_{k_n}) - f(y_{k_n})| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{ASSURDO} \quad \swarrow$$

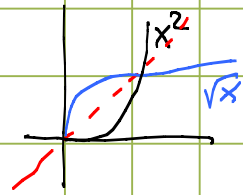
Controesempio (f uniformemente continua $\nRightarrow f$ lipschitziana)

Proviamo che $f(x) = \sqrt{x}$

- è uniformemente continua su $[0,1]$

- non è lipschitziana su $[0,1]$

dici



$f(x) = \sqrt{x}$ è continua su $[0,1]$, e quindi è pure uniformemente continua (Teorema Heine Cantor) su $[0,1]$, intervallo chiuso e limitato.

$$f'(x) = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$$

$\Rightarrow f = \sqrt{x}$ non è lipschitziana su $[0,1]$

Proviamo ora che esistono $\{x_n\}_n, \{y_n\}_n \subset [0,1]$

$$\text{T.c. } Q_n = \left| \frac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

Presi $x_n = \frac{4}{n^2}$ $y_n = \frac{1}{n^2}$ si ha

$$Q_n = \left| \frac{\sqrt{\frac{4}{n^2}} - \sqrt{\frac{1}{n^2}}}{\frac{4}{n^2} - \frac{1}{n^2}} \right| = \left| \frac{\frac{1}{n}}{\frac{3}{n^2}} \right| = \frac{n}{3} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

e quindi $\forall M > 0 \exists \bar{n} : \forall n > \bar{n} \quad Q_n > M$

Ne segue che f non può essere lipschitziana

