

INFINITESIMI e INFINITI

Esercizio (Infinitesimi non confrontabili)

Mostrare che $f(x) = \frac{1}{x}$ e $g(x) = \frac{1}{x + x \sin^2 x}$ per $x \rightarrow +\infty$

sono infinitesimi non confrontabili

diciam

Si verifica che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.

Se può considero

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{x + x \sin^2 x}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \sin^2 x) \neq$$

e quest'ultimo limite $\nexists$ (è una funzione compresa tra 1 e 2 e oscilla tra questi due valori) ↘

Esercizio (un infinitesimo di cui non posso calcolare l'ordine)

Si studi l'infinitesimo $f(x) = \frac{1}{\log x}$ per $x \rightarrow 0^+$

diciam

Quando $x \rightarrow 0^+$ si ha $\log x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow 0$

e dunque $f = o(1)$ per $x \rightarrow 0^+$

$$\forall \alpha > 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^\alpha}{1/\log x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \log x = \lim_{y \rightarrow -\infty} -y \cdot (e^{-y})^\alpha =$$

$$= - \lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{y}{e^{\alpha y}} = 0^- \quad \text{in quanto } \frac{y}{e^{\alpha y}} \rightarrow 0 \quad \forall \alpha > 0!!$$

dunque $x^\alpha = o\left(\frac{1}{\log x}\right) \quad x \rightarrow 0 \quad \forall \alpha > 0$

Analogamente per $x \rightarrow +\infty \quad \frac{1}{\log x} = f(x) \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x^\alpha}{1/\log x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{e^{\alpha y}} = 0 \quad \forall \alpha > 0.$$

ovvero $\frac{1}{x^\alpha} = o\left(\frac{1}{\log x}\right) \quad x \rightarrow +\infty \quad \forall \alpha > 0!$ ↘

Esercizio Calcolare, se esiste, il $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ dove

$$f(x) = e^{\sin x} - \frac{\sin x}{x} - x \quad g(x) = T_2^2(3x)$$

lim

Sviluppo $f(x)$ ottenendomi al primo ordine in un intorno di $x=0$

$$e^{\sin x} = e^{x+o(x)} = 1 + (x+o(x)) + o(x+o(x)) = 1 + x + o(x)$$

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{x+o(x^2)}{x} = 1 + o(x)$$

$$f(x) = 1 + x + o(x) - 1 + o(x) - x = o(x)$$

$$g(x) = [T_2(3x)]^2 = [3x + o(x)]^2 = 9x^2 + o(x^2)$$

Calcolo il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x)}{9x^2 + o(x^2)}$$

NON POSSO CONCLUDERE

(potrebbe essere $x^{3/2} = o(x)$ $x^2 = o(x)$ $x^3 = o(x)$ etc)

Proviamo ad aumentare i termini dello sviluppo

$$\begin{aligned} e^{\sin x} &= e^{x+o(x^2)} = 1 + (x+o(x^2)) + \frac{1}{2}(x+o(x^2))^2 + o((x+o(x^2))^2) \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \end{aligned}$$

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3) = 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - \left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right) - x \\ &= \frac{2}{3}x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

$$g(x) = (3x + o(x^2))^2 = 9x^2 + o(x^3)$$

$$\text{Calcolo il limite: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{3}x^2 + o(x^2)}{9x^2 + o(x^3)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{27} \cdot \frac{1+o(1)}{1+o(x)} = \frac{2}{27}$$



Esercizio Calcolare $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} e^{\frac{x}{1+x}} \log(1+x)$

dire

pongo $1+x=y$ $\lim_{y \rightarrow 0^+} e^{\frac{y-1}{y}} \log y = e \cdot \lim_{y \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{y}} \log y$

$$\left(z = \frac{1}{y}\right) = e \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{\log \frac{1}{z}}{e^z} = -e \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{\log z}{e^z} = 0 \quad \checkmark$$

Esercizio Calcolare $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}$

dire

$(\cos x)^{\frac{1}{\sin x}} = e^{f(x)}$ con $f(x) = \frac{1}{\sin x} \log(\cos x)$
e dunque ci si riduce a calcolare $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

$$f(x) = \frac{\log\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)}{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)} = \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^3)}{x\left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right)} =$$

$$= \left[-\frac{x}{2} + o(x^2)\right] \cdot \left(1 + \left(-\frac{x^2}{6} + o(x^2)\right)\right) =$$

$$= \left[-\frac{x}{2} + o(x^2)\right] \left[1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right] = -\frac{x}{2} + o(x^2)$$

Dunque $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{x}{2} + o(x^2)} = 1 \quad \checkmark$

Esercizio: determinare $a, b \in \mathbb{R}$ in modo che la funzione $f = e^{x^2} + a x^2 - b \cos x$ sia, per $x \rightarrow 0$, un infinitesimo di ordine il più elevato possibile rispetto all'infinitesimo di ordine $g(x) = x$

$$\begin{aligned} \text{dim} \\ f(x) &= 1 + x^2 + \frac{x^4}{24} + o(x^5) + a x^2 \\ &\quad - b \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) \right) \\ &= (1-b) + x^2 \left(1+a + \frac{b}{2} \right) + x^4 \left(\frac{1}{24} - \frac{b}{24} \right) + o(x^5) \end{aligned}$$

per $x \rightarrow 0$

Per soddisfare al requisito che f sia un infinitesimo necessariamente $b=1$

Per aumentare l'ordine è necessario richiedere che $1+a+\frac{b}{2} = 1+a+\frac{1}{2} = 0 \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$

Si trova che

$$f(x) = e^{x^2} - \frac{3}{2}x^2 - \cos x = \frac{11}{24}x^4 + o(x^5) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

Esercizio Calcolare $\lim_{x \rightarrow 1^+} \log x \log(\log x)$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \log x \log(\log x) = \lim_{y \rightarrow 0^+} y \log y = - \lim_{\substack{z \rightarrow +\infty \\ z = -\log y}} e^{-z} \cdot z =$$

$$= - \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{z}{e^z} = 0^-$$

Esercizio: Calcolare $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x f(t) dt}{\log(3+2x)}$ dove $f(t) = \frac{5+2t-\cos t}{1+t^2}$

dimo

Questo è un limite della forma ∞/∞ : infatti

$$f(t) \sim \frac{2}{t} \text{ per } t \rightarrow +\infty \quad \left(\text{infatti } \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(t)}{2/t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{5+t-\frac{\cos t}{2}}{t+1/t} \right)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1+\frac{5}{2t}-\frac{\cos t}{2t}}{1+1/t^2} = 1$$

$$\text{ed essendo } \int_1^{+\infty} \frac{2}{t} dt = +\infty \Rightarrow \int_1^{+\infty} f(t) dt = +\infty \Rightarrow \int_0^{+\infty} f(t) dt = +\infty$$

$$\text{Inoltre } \lim_{x \rightarrow +\infty} \log(3+2x) = +\infty.$$

Si può applicare quindi il Teorema dell'Hôpital

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x f(t) dt}{\log(3+2x)} \stackrel{(H)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\frac{2}{3+2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5+2x-\cos x}{1+x^2} \cdot \frac{3+2x}{2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} \cdot \frac{2+\frac{5}{x}-\frac{\cos x}{x}}{1+\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{2+\frac{3}{x}}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Esercizio: Sia $g(x) = e^{\sin x} - \cos(e^x - 1) - 1$

1) Determinare ordine e principio dell'infinitesimo $g(x)$ per $x \rightarrow 0$

2) Posto $Q_n = g(1/n)$, determinare per quali $\alpha > 0$ risulta convergente $\sum_n (Q_n)^\alpha$

dimo

$$e^{\sin x} = 1 + \sin x + \frac{1}{2} \sin^2 x + \frac{1}{6} \sin^3 x + \frac{1}{24} \sin^4 x + o(\sin^4 x) = 1 + \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) + \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2$$

$$+ \frac{1}{6} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^3 + \frac{1}{24} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^4 + o((x - \frac{x^3}{6} + o(x^4))^4)$$

$$= 1 + x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{6} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{8} x^4 + o(x^4)$$

$$\cos(e^x - 1) = e^x - 1 - \frac{1}{6} (e^x - 1)^3 + o((e^x - 1)^4) =$$

$$= \left(x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) - \frac{1}{6} \left(x + \frac{x^2}{2} + o(x^4)\right)^3 + o(x^4)$$

$$= x + \frac{x^2}{2} - \frac{5}{24} x^4 + o(x^4)$$

$$g(x) = \cancel{1+x} + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{8} x^4 - \left(\cancel{x + \frac{x^2}{2}} - \frac{5}{24} x^4\right) - \cancel{1} + o(x^4)$$

$$g(x) = + \frac{x^4}{12} + o(x^4) \quad x \rightarrow 0$$

$$\text{ordine}(g) = 4 \quad \text{pp.}(g) = \frac{x^4}{12}$$

$$2) \quad Q_n = g\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

$$Q_n^\alpha = \left(\frac{1}{12}\right)^\alpha \cdot \frac{1}{n^{4\alpha}} \left(1 + o(1)\right)^\alpha$$

$$Q_n^\alpha \sim \frac{1}{n^{4\alpha}} \quad (n \rightarrow +\infty) \quad (\text{in fatt. } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{Q_n^\alpha}{1/n^{4\alpha}} = \left(\frac{1}{12}\right)^\alpha)$$

$\Rightarrow$ (Criterio del
comparatio
aritm. co.) $\sum_n Q_n^\alpha$ converge se $\sum_n \frac{1}{n^{4\alpha}}$ converge

$$\text{se } 4\alpha > 1$$

$$\text{se } \alpha > \frac{1}{4}$$

Dunque $\sum_n Q_n^\alpha$ converge se $\alpha > \frac{1}{4}$ $\checkmark$

Esercizio 4. Uno sviluppo di Taylor in $x_0 = 0$ della funzione $\frac{\log(1+3x)}{2x+1}$ è

(A) $3x - 3x^2/2 + o(x^2)$.

(C) $3x - 21x^2/2 + o(x^2)$.

(B) nessuna delle altre risposte è vera.

(D) $3x + 3x^2/2 + o(x^2)$.

$$f(x) = \frac{\log(1+3x)}{2x+1} = \left(3x - \frac{9}{2}x^2 + o(x^2)\right) (1 - 2x + o(x)) =$$

$$= 3x - 6x^2 - \frac{9}{2}x^2 + o(x^2) =$$

$$= 3x - \frac{21}{2}x^2 + o(x^2) \quad \text{e quindi la risposta corretta è la (C)}$$

PROBLEMA 2

Determinate al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il valore del limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n - n^{\alpha n}}{2n^{4\alpha} - n^3}.$$

I valori critici sono $\alpha = 1$ e $\alpha = \frac{3}{4}$

$$\alpha < \frac{3}{4} \quad \frac{n^n - n^{\alpha n}}{2n^{4\alpha} - n^3} = \frac{n^n}{n^3} \cdot \frac{1 - n^{(\alpha-1)n}}{2n^{4\alpha-3} - 1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \cdot \frac{1-0}{0-1} = -\infty$$

$$\alpha = \frac{3}{4} \quad \frac{n^n - n^{\frac{3n}{4}}}{n^3} = \frac{n^n}{n^3} \left(1 - n^{-\frac{n}{4}}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \cdot (1-0) = +\infty$$

$$\frac{3}{4} < \alpha < 1 \quad \frac{n^n - n^{\alpha n}}{2n^{4\alpha} - n^3} = \frac{n^n}{n^{4\alpha}} \cdot \frac{1 - n^{(\alpha-1)n}}{2 - n^{3-4\alpha}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \cdot \frac{1-0}{2-0} = +\infty$$

$$\alpha = 1 \quad \frac{0}{2n^{4\alpha} - n^3} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$1 < \alpha \quad \frac{n^n - n^{\alpha n}}{2n^{4\alpha} - n^3} = \frac{n^{\alpha n}}{n^{4\alpha}} \cdot \frac{n^{(1-\alpha)n} - 1}{2 - n^{3-4\alpha}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \cdot \frac{0-1}{2-0} = -\infty$$

Si osserva che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{\alpha n}}{n^{4\alpha}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{(\alpha n - 4\alpha)} = +\infty \quad \forall \alpha > 0 \quad \forall \alpha > \frac{1}{4}$

Esercizio 5. Un polinomio di Taylor centrato in $x_0 = 0$ di $f(x) = e^x \sin x - x(1+x)$ è

(A) $x^3/3$.

(B) $-x^2$.

(C) $-x^3/6$.

(D) $x^3/2$.

Ricordo che $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ e $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$

$$\Rightarrow f(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) - x - x^2$$

$$\stackrel{1}{=} x - \frac{x^3}{6} + x^2 + \frac{x^3}{2} + o(x^3) - x - x^2$$

$$\stackrel{1}{=} \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

La risposta corretta è la (A)

PROBLEMA 3

Sia data la funzione $f(x) = (1 - \cos^2 x)^2 - [\log(1 + x^2)]^2$.

a) Trovate l'ordine di infinitesimo e la parte principale di $f(x)$ per $x \rightarrow 0$.

b) Calcolate al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il limite $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha f(x)$.

$$\begin{aligned}
 a) f(x) &= \left(1 - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)\right)\right)^2 - \left(x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^5)\right)^2 \\
 &= \left(1 - \left(1 + \frac{x^4}{4} - x^2 + \frac{x^4}{12} + o(x^5)\right)\right)^2 - \left(x^4 - x^6 + o(x^7)\right) \\
 &= \left(x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^5)\right)^2 - x^4 + x^6 + o(x^7) \\
 &= \cancel{x^4} - \frac{2}{3}x^6 + o(x^7) - \cancel{x^4} + x^6 \\
 &= \frac{x^6}{3} + o(x^7) \quad x \rightarrow 0
 \end{aligned}$$

Donque $\text{ordine}(f) = 6$ p.p. $(f) = \frac{x^6}{3}$ per $x \rightarrow 0$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \cdot x^\alpha = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{6+\alpha}}{3} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha < -6 \\ \frac{1}{3} & \text{se } \alpha = -6 \\ 0 & \text{se } \alpha > -6 \end{cases}$$

PROBLEMA 3

Calcolate al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \left(\frac{1}{1+x} - \frac{\sin x}{xe^x} \right).$$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{1}{1+x} - \frac{\sin x}{xe^x} = 1 - x + x^2 + o(x^2) - \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)}{x(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2))} \\
 &= 1 - x + x^2 + o(x^2) - \left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)\right) \left[1 - \left(x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) + \left(x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^2 + o(x^2)\right] \\
 &= 1 - x + x^2 + o(x^2) - \left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)\right) \left[1 - x - \frac{x^2}{2} + x^2 + o(x^2)\right] \\
 &= \cancel{1} - \cancel{x} + x^2 + o(x^2) - \left[\cancel{1} - \cancel{x} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right] \\
 &= x^2 \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right) + o(x^2) = \frac{2}{3}x^2 + o(x^2) \quad (x \rightarrow 0)
 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{3} x^{2-\alpha} = \begin{cases} +\infty & 2 < \alpha \\ \frac{2}{3} & \alpha = 2 \\ 0 & \alpha < 2 \end{cases}$$

PROBLEMA 4

Determinate per quali $\beta \in \mathbb{R}$ si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{(n^\beta)} = 1.$$

Determinate poi per quali valori di $\beta \in \mathbb{R}$ converge la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{(n^\beta)} - 1 \right].$$

Bisogna calcolare, al variare di β , il seguente limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^\beta} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{f(n)} \quad \text{dove } f(n) = n^\beta \log\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$$

$$f(n) = n^{\beta-2} \cdot \frac{\log\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}} \quad \text{Un limite notevole ci dice}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}} = 1$$

$$\text{e dunque } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\beta-2} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \beta > 2 \\ 1 & \text{se } \beta = 2 \\ 0 & \text{se } \beta < 2 \end{cases}$$

$$\text{da cui segue } e^{f(n)} \rightarrow \begin{cases} +\infty & \text{se } \beta > 2 \\ e & \text{se } \beta = 2 \\ 1 & \text{se } \beta < 2 \end{cases}$$

ovvero

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^\beta} = 1 \quad \forall \beta < 2$$

Dovendo studiare la convergenza serve una stima più accurata nel caso $\beta < 2$

$$f(n) = n^\beta \log\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) = n^\beta \cdot \left(\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{n^{2-\beta}} + o\left(\frac{1}{n^{2-\beta}}\right)$$

$$\Rightarrow Q_n = e^{f(n)} - 1 = 1 + \frac{1}{n^{2-\beta}} + o\left(\frac{1}{n^{2-\beta}}\right) - 1 = \frac{1}{n^{2-\beta}} + o\left(\frac{1}{n^{2-\beta}}\right)$$

$$\text{Adesso } Q_n \sim \frac{1}{n^{2-\beta}} \text{ per } n \rightarrow +\infty \quad \forall \beta < 2 \quad \left(\text{infatti, } \lim_{n \rightarrow +\infty} Q_n n^{2-\beta} = 1 \right)$$

$$\text{e dunque } \sum_n Q_n \text{ converge se } \sum_n \frac{1}{n^{2-\beta}} \text{ converge}$$

(Criterio Confronto asintotico)

se $2-\beta > 1$
 se $1 > \beta$

$$\text{Quindi } \sum_n Q_n \text{ converge se } \beta < 1$$

PROBLEMA 3

Calcolate, al variare dell'esponente $\alpha \in \mathbb{R}$, il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \left(x^2 + \cos x - \frac{1}{\cos x} \right).$$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + \cos x - \frac{1}{\cos x} = x^2 + \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) \right) - \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)} \\ &= \cancel{1} + \cancel{\frac{x^2}{2}} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) - \left[\cancel{1} + \left(\cancel{\frac{x^2}{2}} - \frac{x^4}{24} + o(x^5) \right) + \left(\frac{x^2}{2} \cdot \frac{x^4}{24} + o(x^5) \right)^2 + o(x^5) \right] \\ &= x^4 \left(\frac{1}{24} + \frac{1}{24} - \frac{1}{4} \right) + o(x^5) \quad x \rightarrow 0 \quad \frac{1}{12} - \frac{3}{12} \\ &\Downarrow \end{aligned}$$

$$f(x) = -\frac{x^4}{6} + o(x^5) \quad (x \rightarrow 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{x^{4+\alpha}}{6} + o(x^{5+\alpha}) = \begin{cases} -\infty & \text{se } \alpha < -4 \\ -\frac{1}{6} & \text{se } \alpha = -4 \\ 0 & \text{se } \alpha > -4 \end{cases}$$

PROBLEMA 4

Sia

$$a_n = \int_{n^3}^{(1+n^2)^{3/2}} \frac{1}{x} dx.$$

Calcolate a_n e determinate il carattere della serie numerica $\sum_n a_n$. Studiate poi, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il carattere della serie $\sum_n (a_n)^\alpha$.

$$Q_n = \left[\log |x| \right]_{x=n^3}^{(1+n^2)^{3/2}} = \frac{3}{2} \log \left[\frac{(1+n^2)^{3/2}}{n^3} \right] = \frac{3}{2} \log \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)$$

$$\text{Dunque } Q_n = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \Rightarrow Q_n \sim \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{n^2} \quad n \rightarrow +\infty$$

(in fatti $\lim_{n \rightarrow +\infty} Q_n \cdot \frac{2n^2}{3} = 1$)

Dunque $\sum_n Q_n$ converge se $\sum_n \frac{3}{2} \frac{1}{n^2}$ converge

$$\text{Essendo } Q_n^\alpha = \left[\frac{3}{2} \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right]^\alpha \quad \text{ne segue}$$

$$\text{che } Q_n^\alpha \sim \left(\frac{3}{2} \right)^\alpha \cdot \frac{1}{n^{2\alpha}} \quad n \rightarrow +\infty \quad \forall \alpha > 0 \quad \left(\text{in fatti } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^\alpha n^{2\alpha}}{3^\alpha} Q_n^\alpha = 1 \right)$$

$$\Rightarrow \text{(Criterio Comparato asintotico)} \quad \sum_n Q_n^\alpha \text{ converge se } \sum_n \left(\frac{3}{2} \right)^\alpha \frac{1}{n^{2\alpha}} \text{ converge}$$

se $2\alpha > 1$

se $\alpha > \frac{1}{2}$