Studio di Funzione

Esercizio: Sia $f(x) = x^3 + ax + b$. Dire, al variare di $a, b \in \mathbb{R}$, quante sono le soluzioni di $f(x) = 0$.

dim

Osservo che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.
Ne segue che $\forall a, b \in \mathbb{R}$ esiste almeno una soluzione x_1 : $f(x_1) = 0$

La derivata prima è $f'(x) = 3x^2 + a$.

1) Se $a > 0$ allora $f'(x) \geq a$ $\forall x \in \mathbb{R}$ allora f è strettamente crescente su $\mathbb{R}$ allora $\exists! \, x_1 \in \mathbb{R}$ tale che $f(x_1) = 0$

2) Se $a = 0$ allora $[f'(x) = 0 \text{ sse } x = 0]$ allora f è strettamente crescente su $\mathbb{R}$ allora $\exists! \, x_1 = \sqrt[3]{-b} \in \mathbb{R}$ tale che $f(x_1) = 0$

3) Se $a < 0$ allora $3x^2 = -a$ ha due soluzioni

$\alpha = -\sqrt{-\frac{a}{3}}$ $\beta = \sqrt{-\frac{a}{3}}$ e si ha

$$f(x) \begin{cases} \text{crescente} & x < \alpha \\ \text{decrescente} & \alpha < x < \beta \\ \text{crescente} & \beta < x \end{cases}$$

α è un punto di massimo relativo $f(\alpha) = -\left(-\frac{a}{3}\right)^{3/2} - a\sqrt{-\frac{a}{3}} + b$

β " " " minimo relativo $f(a_2) = \left(-\frac{a}{3}\right)^{3/2} + a\sqrt{-\frac{a}{3}} + b$

3.1) $0 > f(\alpha) > f(\beta) \Rightarrow$ 1 radice reale molteplicità 1

3.2) $0 = f(\alpha) > f(\beta) \Rightarrow$ 1 " " " 1
1 " " " 2 $x = \alpha$

3.3) $f(\alpha) > 0 > f(\beta) \Rightarrow$ 3 radici reali $\neq$ con molteplicità 1

3.4) $f(\alpha) > 0 = f(\beta) \Rightarrow$ 1 radice reale molteplicità 1
1 radice reale $x = \beta$ di molteplicità 2

3.5) $f(\alpha) > f(\beta) > 0 \Rightarrow$ 1 radice reale di molteplicità 1

$$f(\alpha)f(\beta)=\left(-\left(-\frac{a}{3}\right)^{3/2}-a\left(-\frac{a}{3}\right)^{1/2}+b\right)\left(\left(-\frac{a}{3}\right)^{3/2}+a\left(-\frac{a}{3}\right)^{1/2}+b\right)=$$

$$=\left(-\frac{1}{3\sqrt{3}}(-a)^{3/2}-\frac{1}{\sqrt{3}}(-a)^{3/2}+b\right)\left(\frac{1}{3\sqrt{3}}(-a)^{3/2}+\frac{1}{\sqrt{3}}(-a)^{3/2}+b\right)=$$

$$=\left(-\frac{4}{3\sqrt{3}}(-a)^{3/2}+b\right)\left(\frac{4}{3\sqrt{3}}(-a)^{3/2}+b\right)=b^2-\frac{16}{27}(-a)^3=b^2+\frac{16}{27}a^3$$

dunque

$$f(\alpha)f(\beta)=b^2+\frac{16}{27}a^3<0 \Rightarrow 3 \text{ radici}$$

$$f(\alpha)f(\beta)=b^2+\frac{16}{27}a^3=0 \Rightarrow 2 \text{ radici}$$

$$f(\alpha)f(\beta)=b^2+\frac{16}{27}a^3>0 \Rightarrow 1 \text{ soluzione}$$

$(x-1)(x^2+x+2)=x^3+x-2$

Esercizio: Sia $f(x)=|\operatorname{arctg} x|-\frac{x^2}{4}+2$

Determinare i limiti agli estremi del dominio, le regioni di monotonia, i massimi relativi e tracciare un grafico approssimato di $f(x)$.

dim

Il dominio di f è tutto $\mathbb{R}$. Inoltre $f(x)=f(-x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$

$$f(-x)=|\operatorname{arctg}(-x)|-\frac{(-x)^2}{4}+2=|-\operatorname{arctg}(x)|-\frac{x^2}{4}+2=f(x)$$

Studiamo solo per $x>0$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}x^2\left(\frac{|\operatorname{arctg}x|}{x^2}-1+\frac{2}{x^2}\right)=-\infty$$

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{x}{2}=\frac{2-x-x^3}{2(1+x^2)}=0 \quad \text{se } (x-1)(x^2+x+2)=0$$

se $x=1$

Dunque $f(x)\begin{cases}\text{cresce, per } 0<x<1\\ \text{decresce, per } 1<x\end{cases} \Rightarrow x=1$ punto di massimo per $f(x)$

Essendo $\lim_{x\to0^+}f'(x)=2$ (e quindi $\lim_{x\to0^-}f'(x)=-2$)

il punto $x=0$ è di minimo relativo per $f(x)$

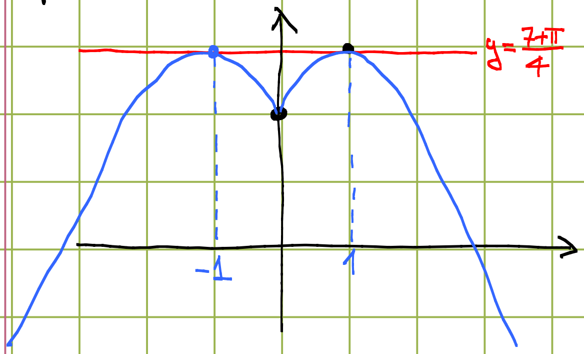
$$f''(x)=\frac{(-1-3x^2)(1+x^2)-2x(2-x-x^3)}{(1+x^2)^2}$$

$$=\frac{-1-x^2-3x^2-3x^4-4x+2x^2+2x^4}{(1+x^2)^2}=-\frac{x^4+2x^2+4x+1}{(1+x^2)^2}<0$$

quando $x>0$!!!

Osservando che $f(0)=2 < f(1) = \arctg(1) - \frac{1}{4} + 2 = \frac{\pi}{4} + \frac{7}{4} = \frac{7+\pi}{4}$

possiamo tracciare un grafico approssimativo



Esercizio: Sia data $f(x) = x e^{\frac{1}{1+x}}$. Tracciate un grafico approssimato di f.

dim

La funzione f è definita $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. La funzione non è né pari né dispari. Calcolo i limiti agli estremi del dominio

$$\lim_{x\to-\infty} x e^{\frac{1}{1+x}} = \lim_{x\to-\infty} x \cdot \lim_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{1+x}} = -\infty \cdot 1 = -\infty$$

$$\lim_{x\to-1^-} x e^{\frac{1}{1+x}} = -1 \cdot \lim_{x\to-1^-} e^{\frac{1}{1+x}} \underset{y=\frac{1}{1+x}}{=} -1 \cdot \lim_{y\to-\infty} e^{y} = 0^-$$

$$\lim_{x\to-1^+} x e^{\frac{1}{1+x}} = -1 \lim_{x\to-1^+} e^{\frac{1}{1+x}} \underset{y=\frac{1}{1+x}}{=} -1 \cdot \lim_{y\to+\infty} e^{y} = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} x e^{\frac{1}{1+x}} = \lim_{x\to+\infty} x \cdot \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{1+x}} = \lim_{x\to+\infty} x \lim_{y\to0^+} e^{y} = +\infty \cdot 1 = +\infty$$

Per quanto riguarda la monotonia $f'(x) = e^{\frac{1}{1+x}} - x e^{\frac{1}{1+x}} \cdot \frac{1}{(1+x)^2}$

$$f'(x) = \frac{e^{\frac{1}{1+x}}}{(1+x)^2}\left((1+x)^2 - x\right) = \frac{e^{\frac{1}{1+x}}}{(1+x)^2}\left(x^2+x+1\right) > 0 \quad \forall x \neq -1$$

Abbiamo visto che $x=-1$ è asintoto verticale

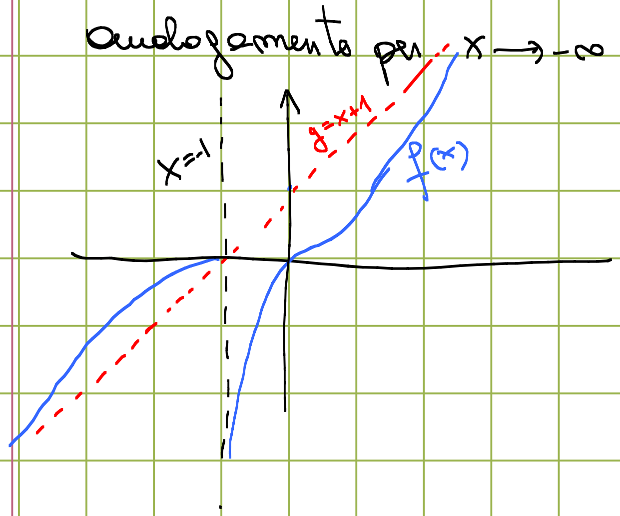
Vediamo ora che $y = x+1$ è asintoto obliquo per $x \to \pm\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{1+x}} = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(x e^{\frac{1}{1+x}} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} x\left(e^{\frac{1}{1+x}} - 1\right) = \lim_{x\to+\infty} x\left(1+\frac{1}{1+x}+o\left(\frac{1}{1+x}\right)-1\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{1}{1+x}+o\left(\frac{1}{1+x}\right)\right) = 1$$

analogamente per $x \to -\infty$ si ha $\left(f(x) - x - 1\right) \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$



Esercizio: Sia dato $f(x) = \frac{\log|x-1|}{x}$. Tracciare un grafico approssimato di f

dim

Il dominio di f è $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0^-$ $\quad \lim_{x\to1^-} f(x) = -\infty = \lim_{x\to1^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x\to1} f(x) = 1$

$\lim_{x\to+\infty} f = 0^+$ $\quad \lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0} \frac{\log(1-x)}{x} \overset{y=-x}{=} \lim_{y\to0} \frac{\log(1+y)}{-y} = -1$

$x=1$ Asintoto verticale $\qquad y=0$ Asintoto orizzontale

Vediamo la monotonia

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}\log|x-1| + \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{(x-1)} = \frac{1}{x^2(x-1)}\left(x-(x-1)\log|x-1|\right)$$

$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0^- = \lim_{x\to-\infty} f'(x)$ $\quad \lim_{x\to1^-} f'(x) = -\infty$ $\quad \lim_{x\to1^+} f'(x) = +\infty$

$$f'(x) = \frac{x-(x-1)\left(-x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)}{(x-1)x^2} = \frac{\cancel{x}+x^2-\cancel{x}-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{(x-1)x^2} \xrightarrow[x\to0]{} -\frac{1}{2}$$

Per studiare il segno di f' va studiato il segno di $g(x) = x-(x-1)\log|x-1|$

$\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

$$g' = 1 - \log|x-1| - 1 = -\log|x-1| = \begin{cases} <0 & x<0 \\ =0 & x=0 \\ >0 & 0<x<1 \\ >0 & 1<x<2 \\ 0 & x=2 \\ <0 & 2<x \end{cases}$$

$g(0) = 0$ = min locale $g(x)$ $\qquad g(2) = 2$ = max locale $g(x)$

$\Rightarrow \exists\, \bar{x} > 2$ t.c. $g(x) < 0 \ \forall x > \bar{x}$, $g(x) > 0 \ \forall x < \bar{x}$ $x \neq 0$

$$\Rightarrow f'(x) \begin{cases} <0 & x<0 \\ =0 & x=0 \\ <0 & 0<x<1 \\ >0 & 1<x<2 \\ =0 & x=2 \\ >0 & 2<x<\bar{x} \\ =0 & x=\bar{x} \\ <0 & x<\bar{x} \end{cases} \Rightarrow f(x) \begin{cases} \text{decrescente} & x<1 \\ \text{crescente} & 1<x<\bar{x} \\ \text{decrescente} & \bar{x}<x \end{cases}$$

La funzione ha quindi un punto di max relativo in $\bar{x}$
Quindi $x=\bar{x}$ risulta essere un punto di max assoluto per $f(x)$
Abbiamo abbastanza elementi per tracciare un grafico approssimativo (per semplicità ho copiato il grafico di $f(x)$ insieme ad un dettaglio del punto di massimo).

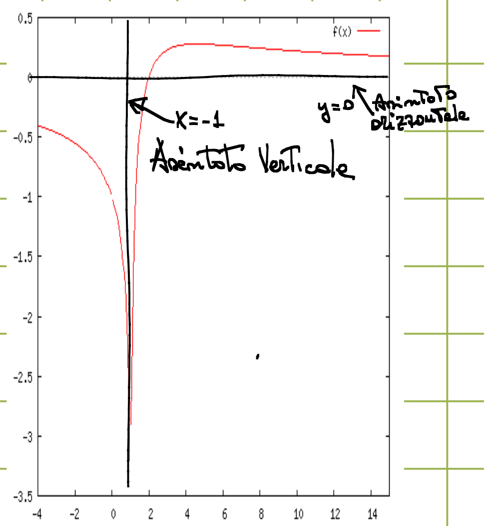


Grafico di f nell'intervallo [-4,14]

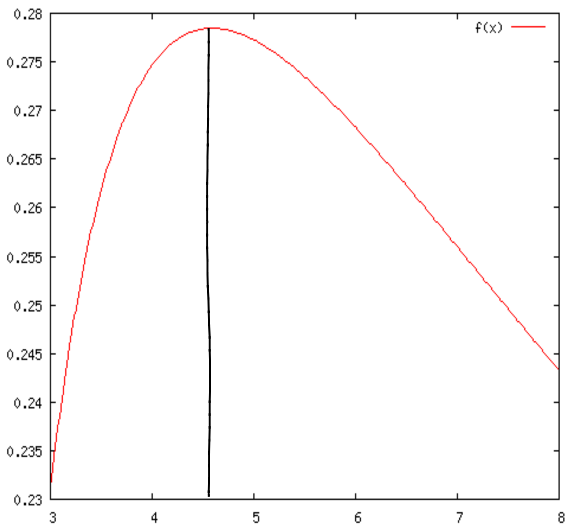


Grafico di f in un intorno del punto di max $\bar{x}$

Esercizio Sia $f(x)=\sqrt{\frac{x-2}{x+1}}$. Tracciare un grafico approssimato di $f(x)$

dim

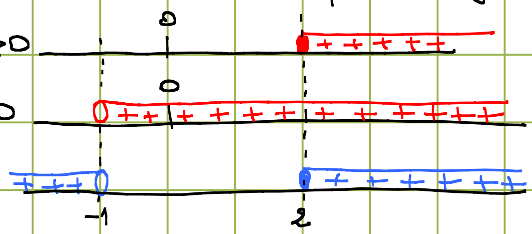
La funzione è definita e continua per tutti gli x t.c.

$\frac{x-2}{x+1} \geq 0$, ovvero

$x-2 \geq 0$

$x+1 > 0$

$\frac{x-2}{x+1} \geq 0$



ovvero $\mathrm{dom}(f) =]-\infty,-1[\cup [2,+\infty[$

LIMITI agli estremi del dominio

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1 \qquad \lim_{x\to-1^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to 2^+} f(x)=0 \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$

$\Longrightarrow$ $x=-1$ è un asintoto verticale, $y=1$ è un asintoto orizzontale

REGIONI DI MONOTONIA

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x-2}{x+1}}} \cdot \frac{x+1-(x-2)}{(x+1)^2} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{x+1}{x-2}} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} \quad \text{definito } \forall x \neq 2,-1$$

in particolare $\lim_{x\to\pm\infty} f'(x)=0 \qquad \lim_{x\to-1} f'(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 2} f'(x) = +\infty$

Inoltre $f'(x)>0 \ \forall x \in]-\infty,-1[\cup]2,+\infty[$.

$$f''(x) = \frac{3}{2}\,\frac{1}{2\sqrt{\frac{x+1}{x-2}}} \cdot \frac{x-2-x-1}{(x-2)^2} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} - 3\sqrt{\frac{x+1}{x-2}} \cdot \frac{1}{(x+1)^3}$$

$$= -\frac{9}{4}\sqrt{\frac{x-2}{x+1}} \cdot \frac{1}{(x-2)^2} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} - 3\sqrt{\frac{x+1}{x-2}} \cdot \frac{1}{(x+1)^3}$$

$$= -\frac{3}{4}\,\frac{1}{(x-2)^2} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} \cdot \sqrt{\frac{x-2}{x+1}} \left(3 + 4\,\frac{|x+1|}{|x-2|} \cdot \frac{(x-2)^2}{(x+1)}\right)$$

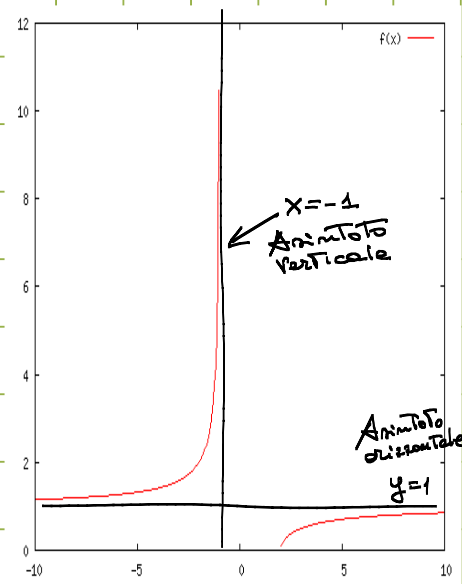
$$= -\frac{3}{4}\sqrt{\frac{x-2}{x+1}} \cdot \frac{1}{(x-2)^2} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} \cdot \left(3 + 4\,\frac{x+1}{|x+1|} \cdot |x-2|\right)$$

$$3+4\,\frac{x+1}{|x+1|} \cdot |x-2| = \begin{cases} 3-4(2-x) = -5+4x < 0 & \text{se } x<-1 \\ 3+4(x-2) = 4x-5 > 0 & \text{se } 2<x \end{cases}$$

Ne segue che $f''(x) \begin{cases} >0 & \text{se } x<-1 \\ <0 & \text{se } 2<x \end{cases}$

ovvero f convessa se $x<-1$, concava se $x>2$

Riportiamo il grafico di $f(x)$ per $x\in[-10,10]$.



Esercizio: Sia $f(x)=\dfrac{x^2}{|x-1|}$. Tracciarne un grafico approssimato, e poi determinare il numero di soluzioni dell'equazione $f(x)=k$ al variare di $k\in\mathbb{R}$.

dim

Per primo $\mathrm{dom}(f)=\{x\in\mathbb{R} : f(x)\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

LIMITI AGLI ESTREMI DEL DOMINIO

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ $\quad\lim\limits_{x\to1} f(x)=+\infty$ $\quad\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

INTERSEZIONI CON GLI ASSI

$f(0)=0$ quindi $(0,0)$

SEGNO DI f : $f(x)>0\ \ \forall x\neq 0,1$ $\qquad \dfrac{2x}{x-1}-\dfrac{x^2}{(x-1)^2}$

$2x^2-2x-x^2$

REGIONI DI MONOTONIA

$$f'(x)=x^2\cdot\frac{-1}{|x-1|^2}\cdot\frac{x-1}{|x-1|}+\frac{2x}{|x-1|}=\begin{cases}\dfrac{-x^2+2x}{(x-1)^2} & \text{se } x<1\\[2mm] \dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2} & \text{se } 1<x\end{cases}$$

$f'(x)=0$ se $x=0$, $x=2$

$$f' = \begin{cases} <0 & \text{se } x<0 \\ >0 & \text{se } 0<x<1 \\ <0 & \text{se } 1<x<2 \\ >0 & \text{se } 2<x \end{cases} \Longrightarrow$$

$x=0$ punto di minimo relativo

$x=2$ punto di minimo relativo

In particolare $x=0$ è punto di minimo assoluto $f(0)=0$ in quanto $f(2)=4$

Regioni di convessità/concavità

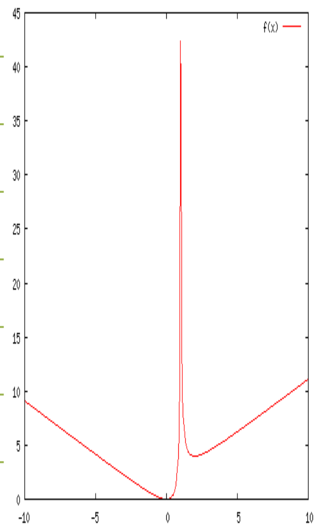
quando $x<1$

$$f''(x) = \frac{-2x+2}{(x-1)^2} - \frac{-2x^2+4x}{(x-1)^3} = \frac{\cancel{-2x^2}\cancel{+2x}\cancel{+2x}-2+\cancel{2x^2}\cancel{-4x}}{(x-1)^3} = -\frac{2}{(x-1)^3}$$

Quando $x>1$

$$f''(x) = \text{....} = \frac{2}{(x-1)^3}$$

Ne segue $f''(x)>0 \ \forall x \neq 1 \Rightarrow f$ convessa strettamente $\forall x \neq 1$



Qui di fianco si trova il grafico (le informazioni raccolte sono sufficienti a tracciare il grafico)

RADICI di $f(x)=k$

Quando	$k<0$	$f(x)=k$	0 radici
"	$k=0$	$f(x)=0$	1 radice
"	$0<k<4$	$f(x)=k$	2 radici
"	$k=4$	$f(x)=4$	3 radici
"	$4<k$	$f(x)=k$	4 radici