Lezione 41 - Analisi Matematica 1 - dicembre 2013

Alcuni esercizi (studio funzione)

Esercizio: Provare che $\operatorname{arctg} t + \operatorname{arctg} \frac{1}{t} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & t>0 \\ -\frac{\pi}{2} & t<0 \end{cases}$

dim

Si consideri $f(t) = \operatorname{arctg} t + \operatorname{arctg} 1/t$: questa funzione è continua e derivabile $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

- $\lim_{t\to -\infty} f(t) = -\frac{\pi}{2}$ $\quad \lim_{t\to 0^-} f(t) = -\frac{\pi}{2}$ $\quad \lim_{t\to 0^+} f(t) = \frac{\pi}{2}$ $\quad \lim_{t\to +\infty} f(t) = \frac{\pi}{2}$
- $$f'(t) = \frac{1}{1+t^2} + \frac{1}{1+(1/t)^2}\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right) = \frac{1}{1+t^2} - \frac{t^2}{t^2+1}\cdot\frac{1}{t^2} = 0 \quad \forall t\neq 0$$

dunque $f(t) = f(1) = \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \quad \forall t>0$

$f(t) = f(-1) = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} \quad \forall t<0$

Esercizio (una funzione integrale)

Data $f(t) = \frac{e^{-t^2}}{\sqrt[3]{t}}$, si definisca $F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad a\neq 0$

i) provare che $F(x)$ è definita $\forall x\in\mathbb{R}$, e quindi si prende $a=0$ e si scrive $F(x) = F_0(x)$

ii) studiare limiti agli estremi del dominio, individuare le regioni di monotonia e quelle di concavità/convessità. Tracciare un grafico approssimativo di F

dim

(i) Preso $a>0$, proviamo che esiste $F_a(0) = \int_a^0 f(t)\,dt$

Infatti $f(t) \sim \frac{1}{\sqrt[3]{t}}$ per $t\to 0$ (infatti $\lim_{t\to 0} f(t)\cdot\sqrt[3]{t} = \lim_{t\to 0} e^{-t^2} = 1$)

ed essendo $\int_a^0 \frac{dt}{\sqrt[3]{t}} = -\int_0^a \frac{dt}{\sqrt[3]{t}} \in \mathbb{R} \Rightarrow$ (criterio conv. asintotico integrali impropri) $\int_a^0 f(t)\,dt \in \mathbb{R}$

Dunque si può definire $F(x) = F_0(x) \quad x\in\mathbb{R}$

(ii) Si ha $F(0)=0$. Inoltre $f(t)=\frac{e^{-t^2}}{\sqrt[3]{t}}$ è dispari, essendo il rapporto tra una funzione pari e una dispari, e quindi $F(x)$ è pari: infatti

$$F(-x)=\int_0^{-x} f(t)\,dt \overset{y=-t}{=} \int_0^{x} f(y)(-1)\cdot dy = -F(x) \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

e quindi posso studiare $F(x)$ solo per $x>0$

– Vediamo $\lim_{x\to+\infty}F(x)=\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^1 f(t)\,dt+\lim_{x\to+\infty}\int_1^x f(t)\,dt$

Questo è un integrale improprio: $\int_0^1 f(t)\,dt=F(1)$ so che esiste; va studiato $\int_1^{+\infty}f(t)\,dt$. Si ha che

$$e^{t^2}\geq 1+t^2 \quad \forall t>0 \Rightarrow \frac{e^{-t^2}}{\sqrt[3]{t}}=\frac{1}{\sqrt[3]{t}\cdot e^{t^2}}\leq\frac{1}{\sqrt[3]{t}\,(1+t^2)} \quad \forall t>0$$

$$\Rightarrow \boxed{f(t)\leq\frac{1}{t^{2+1/3}} \quad \forall t\geq 1}$$

Inoltre $\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^{2+1/3}}\in\mathbb{R}$ in quanto l'esponente $2+\frac{1}{3}>1$

$\Rightarrow$ (Criterio Confronto Integrali Impropri) $\int_1^{+\infty}f(t)\,dt\in\mathbb{R}$

Quindi $\lim_{x\to+\infty}F(x)=\int_0^{+\infty}f(t)\,dt\in\mathbb{R}$

$$\left(\int_0^{+\infty}f(t)\leq\int_0^1\frac{dt}{t^{1/3}}+\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^{2+1/3}}=\left[\frac{t^{2/3}}{2/3}\right]_0^1+\left[\frac{t^{1-7/3}}{-4/3}\right]_1^{+\infty}=\frac{3}{2}+\frac{3}{4}=\frac{9}{4}\right)$$

– Regioni di monotonia $F'(x)=f(x)=\frac{e^{-x^2}}{\sqrt[3]{x}}>0 \quad \forall x>0$

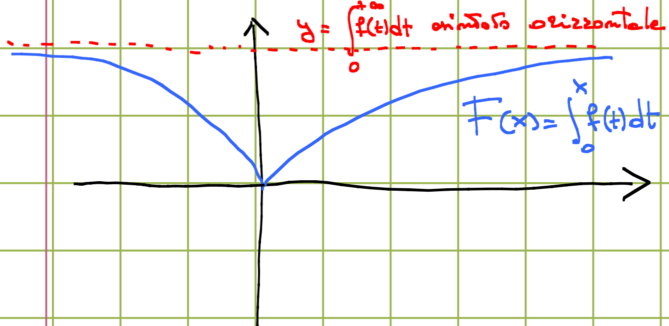
ovvero $F(x)$ è crescente $\forall x>0$, decrescente $\forall x<0$

$F'(x)$ non esiste in $x=0$

– Regioni di concavità/convessità:

$$F''(x)=(f'(x))'=\frac{-2x^{4/3}e^{-x^2}-\frac{1}{3}e^{-x^2}\cdot x^{-2/3}}{x^{2/3}}=-\frac{e^{-x^2}}{x^{4/3}}\cdot(6x^2+1)<0 \quad \forall x\neq 0$$

e dunque la funzione è concava $\forall x\neq 0$



Alcuni Esercizi (Infinitesimi)

Esercizio (un infinitesimo di cui non posso calcolare l'ordine)

Si studi l'infinitesimo $f(x) = \frac{1}{\log x}$ per $x \to 0^+$

dire

Quando $x \to 0^+$ si ha $\log x \to +\infty \Rightarrow f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

e dunque $f = o(1)$ per $x \to 0^+$

Ma $\forall \alpha > 0$ $\lim_{x\to 0^+} \frac{x^\alpha}{1/\log x} = \lim_{x\to 0^+} x^\alpha \log x \underset{y=-\log x}{=} \lim_{y\to +\infty} -y\cdot(e^{-y})^\alpha =$

$= -\lim_{y\to+\infty} \frac{y}{e^{\alpha y}} = 0^-$ in quanto $\frac{y^\alpha}{e^y} \xrightarrow[y\to+\infty]{} 0$ $\forall \alpha > 0$!!

dunque $x^\alpha = o\left(\frac{1}{\log x}\right)$ $x \to 0$ $\forall \alpha > 0$

Analogamente per $x \to +\infty$ $\frac{1}{\log x} = f(x) \to 0$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{1/x^\alpha}{1/\log x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^\alpha} \underset{y=\log x}{=} \lim_{y\to+\infty} \frac{y}{e^{\alpha y}} = 0$ $\forall \alpha > 0$.

ovvero $\frac{1}{x^\alpha} = o\left(\frac{1}{\log x}\right)$ $x \to +\infty$ $\forall \alpha > 0$!

Oss: $f(x) = \frac{1}{x}$ e $g(x) = \frac{1}{x + x\,\text{sen}^2 x}$ sono infinitesime per $x \to +\infty$, ma non sono confrontabili in quanto $\nexists \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$

Alcuni Esercizi (Serie Numeriche)

Esercizio Sia $I_n = \int_{1/4n}^{1/n} \frac{\cos t}{2\sqrt{t}}\,dt \quad n \geq 1.$

(i) Calcolare $\lim_{n\to+\infty} I_n$.

(ii) Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza della serie

$$\sum_{n\geq 1} (n^\alpha I_n)$$

dim

Alcune considerazioni preliminari:

$f(t) = \frac{\cos t}{2\sqrt{t}}$ è positiva e continua su $]0,1]$, dunque

$I_n = \int_0^{1/n} f(t)\,dt - \int_0^{1/4n} f(t)\,dt$ esiste $\forall n \geq 1$ (per la continuità)

Inoltre $f(t) \sim \frac{1}{2\sqrt{t}}$ per $t\to 0$ $\left(\text{infatti } \lim_{t\to 0^+} f(t)/\tfrac{1}{2\sqrt{t}} = \lim_{t\to 0^+} \cos t = 1\right)$

Ma $\int_0^{1/n} \frac{dt}{2\sqrt{t}}$ esiste finito $\forall n$, e quindi per il criterio del confronto per gli integrali impropri $\exists$ finito $\int_0^{1/n} f(t)\,dt$

(i) Dato che $\int_0^{1/n} f(t)\,dt$ e $\int_0^{1/4n} f(t)\,dt$ esistono finite $\forall n$,

allora $\lim_{n\to+\infty} I_n = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{1/n} f(t)\,dt - \lim_{n\to+\infty} \int_0^{1/4n} f(t)\,dt = 0 - 0 = 0$

(vedi NOTA)

Oppure si osserva che, essendo $0 \leq f(t) \leq \frac{1}{2\sqrt{t}} \quad \forall t \in]0,1]$

$$\Longrightarrow_{\text{(Criterio Confronto Integrali)}} 0 \leq \int_{1/4n}^{1/n} f(t)\,dt \leq \int_{1/4n}^{1/n} \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \left[\sqrt{t}\right]_{t=1/4n}^{t=1/n} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

$$0 \xleftarrow{n\to+\infty} 0 \qquad \frac{1}{2\sqrt{n}} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$$

$\Longrightarrow$ (Teorema 2 Carabinieri) $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$

(ii) Essendo $\cos x$ una funzione decrescente in $[0,1]$ si ha

$$\cos(1) \leq \cos t \leq \cos(0) = 1 \implies \frac{\cos(1)}{2\sqrt{t}} \leq \frac{\cos t}{2\sqrt{t}} \leq \frac{1}{2\sqrt{t}} \quad t \in (0,1]$$

$$\implies \text{(criterio confronto)} \quad n^\alpha \int_{1/4n}^{1/n} \frac{\cos(1)}{2\sqrt{t}} dt \leq n^\alpha I_n \leq n^\alpha \int_{1/4n}^{1/n} \frac{dt}{2\sqrt{t}}$$

$$\implies a_n = n^\alpha \cdot \frac{\cos(1)}{2\sqrt{n}} \leq n^\alpha I_n \leq n^\alpha \cdot \frac{1}{2\sqrt{n}} = b_n$$

Ma la serie $\sum_n a_n = \sum_n \frac{\cos(1)}{2} \cdot \frac{1}{n^{\frac{1}{2}-\alpha}}$ converge se $\frac{1}{2}-\alpha > 1$

se $-\frac{1}{2} > \alpha$

e la serie $\sum_n b_n = \sum_n \frac{1}{2n^{\frac{1}{2}-\alpha}}$ converge se $\frac{1}{2}-\alpha > 1$

se $-\frac{1}{2} > \alpha$

$\implies$ (Criterio confronto serie) $\sum_n (n^\alpha I_n)$ converge se $-\frac{1}{2} > \alpha$ ↯

NOTA: se $\lim_{\alpha \to a} \int_\alpha^b f(t)dt \in \mathbb{R}$ allora $\lim_{\beta \to a} \int_a^\beta f(t)dt = 0$

Supponiamo $a, b \in \mathbb{R}$. Se $\int_a^b f(t)dt = \ell \in \mathbb{R}$ allora
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall \alpha \in]a, a+\delta[\quad \left| \int_\alpha^b f(t)dt - \ell \right| < \varepsilon$

ovvero

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall \alpha \in]a, a+\delta[\quad \left| \int_\alpha^{a+\delta} f(t)dt \right| < \varepsilon$ cioè la Tesi! ↯

Esercizio Sia data $f(t) = t \cdot 2^{-t^2}$

(i) Calcolare tutte le primitive di $f(t)$

(ii) Posto $a_n = \int_{\sqrt{n}}^{\sqrt{2n}} f(t)\,dt$, calcolare (se esiste) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

dim

(i) $\int t\, 2^{-t^2} dt = \int t\, e^{-t^2 \log 2} dt = -\frac{1}{2\log 2}\int -2t\log 2\, e^{-t^2\log 2} dt =$

$y = -t^2 \log 2$

$\frac{dy}{dt} = -2t\log 2$

$= -\frac{1}{2\log 2}\left(\int e^y dy\right)_{y=-t^2\log 2}$

$= -\frac{1}{2\log 2} e^{-t^2\log 2} + c \qquad c \in \mathbb{R}$

(ii) $a_n = \int_{\sqrt{n}}^{\sqrt{2n}} f(t)\,dt = \left[-\frac{1}{2\log 2} e^{-2n\log 2} + \frac{1}{2\log 2} e^{-n\log 2}\right]$ e dunque

$$\sum_n a_n = \frac{1}{2\log 2}\left(\sum_n \left(e^{-\log 2}\right)^n - \sum_n \left(e^{-2\log 2}\right)^n\right)$$

$$= \frac{1}{2\log 2}\left(\sum_n \frac{1}{2^n} - \sum_n \frac{1}{4^n}\right)$$

e perciò

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \frac{1}{2\log 2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\log 2}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}} - \frac{1}{1-\frac{1}{4}}\right)$$

$$= \frac{1}{\log 4}\cdot\left(2 - \frac{4}{3}\right) = \frac{1}{\frac{3}{2}\log 4} = \frac{1}{3\log 2}$$

$$= \frac{1}{\log 8}$$

Esercizio:

a) Posto $a_n = n^\alpha\left[\frac{3}{n} - e^{1/n}\cdot \operatorname{sen}\frac{3}{n}\right]$, determinare per quali $\alpha\in\mathbb{R}$ converge $\sum_n a_n$

b) Posto $b_n = n^\alpha\left[\frac{3}{n-1} - e^{1/n}\cdot \operatorname{sen}\frac{3}{n}\right]$, determinare per quali $\alpha\in\mathbb{R}$ converge $\sum_n b_n$

$$\frac{3}{n-1}-\frac{3}{n} = 3\,\frac{1}{n^2-n}$$

dim

a) $$\frac{3}{n} - \left(1+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(\frac{3}{n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \cancel{\frac{3}{n}} - \cancel{\frac{3}{n}} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \frac{3}{n^2} \Rightarrow$$

$$a_n = n^\alpha\left[-\frac{3}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \quad n\to+\infty$$

La serie non converge quando $2-\alpha\le 0$ in quanto

$$a_n = -\frac{3}{n^{2-\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2-\alpha}}\right) \quad \text{e} \quad \lim_{n\to+\infty} a_n \ne 0$$

Quando $2-\alpha>0$ si ha $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Quando $2-\alpha>0$ $\quad a_n \sim \frac{-3}{n^{2-\alpha}}$ per $n\to+\infty$ $\left(\text{infatti } \frac{a_n}{-3/n^{2-\alpha}} = 1+o(1)\xrightarrow[n\to\infty]{}1\right)$

$\Rightarrow$ (Criterio del confronto asintotico) $\sum_n a_n$ converge se $\sum_n -\frac{3}{n^{2-\alpha}}$ converge

se $2-\alpha>1$

se $\boxed{1>\alpha}$

b) $$\frac{3}{n-1} - \left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(\frac{3}{n} - \frac{1}{6}\cdot\frac{27}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$$

$$\frac{3}{n-1} - \left[\frac{3}{n} - \frac{1}{\cancel{6}_{2}}\frac{\cancel{27}^{9}}{n^3} + \frac{3}{n^2} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]$$

$$= 3\,\frac{1}{2n^3(n-1)}\left(2n^3 - 2n^2(n-1) + 9(n-1) - 2n(n-1) - (n-1)\right) + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$= \frac{3}{2(n-1)n^3}\left(\cancel{2n^3} - \cancel{2n^3} + \cancel{2n^2} + 9n - 9 - \cancel{2n^2} + 2n - n + 1\right) + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$= \frac{3(\cancel{10}^{5} n - \cancel{8}^{4})}{\cancel{2}(n-1)\,n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) = \frac{3(5n-4)}{n^3(n-1)} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$b_n = n^\alpha\left[\frac{3(5n-4)}{n^3(n-1)} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]$$

Quando $3-\alpha\le 0$ $\quad b_n \not\to 0$ per $n\to+\infty$

Quando $3-\alpha>0$ $\quad b_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$, e si ha

$b_n \sim \frac{15}{n^{3-\alpha}}$ per $n\to+\infty$ $\left(\text{infatti } \frac{b_n}{15/n^{3-\alpha}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1\right)$

$\Rightarrow$ (Criterio del confronto asintotico) $\sum_n b_n$ converge se $\sum_n \frac{15}{n^{3-\alpha}}$ converge

se $3-\alpha>1$ se $\boxed{2>\alpha}$

Esercizio: Posto $a_n = \int_n^{n+1/n^\alpha} t \operatorname{arctg} t\, dt$, studiare al variare di $\alpha>0$, il comportamento della serie $\sum_n a_n$

dim

$f(t) = t \operatorname{arctg} t$ è una funzione crescente, e quindi

$$\frac{1}{n^\alpha} \cdot n \cdot \frac{\pi}{4} \leq \left(n+\frac{1}{n^\alpha}-n\right) \cdot f(n) \leq a_n \leq \left(n+\frac{1}{n^\alpha}-n\right) \cdot f(n+1/n^\alpha) \leq \frac{1}{n^\alpha} \cdot \left(n+\frac{1}{n^\alpha}\right) \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$b_n = \frac{\pi}{4} \frac{1}{n^{\alpha-1}} \leq a_n \leq \frac{\pi}{2} \frac{1}{n^\alpha}\left(n+\frac{1}{n^\alpha}\right) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}}+\frac{1}{n^{2\alpha}}\right) = c_n$$

$c_n \sim \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{n^{\alpha-1}}$ $n \to +\infty$ $\left(\text{infatti } \frac{1}{n^{2\alpha}} = o\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}}\right) \; n \to +\infty \; \forall \alpha>0\right)$

$\Rightarrow$ (criterio confronto asintotico) $\sum_n c_n$ converge se $\sum_n \frac{\pi}{2} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$ converge se $\alpha-1>1$ se $\boxed{\alpha>2}$

$\sum_n b_n$ converge se $\alpha-1>1$ se $\boxed{\alpha>2}$

Ne segue che la serie $\sum_n a_n$ converge se $\boxed{\alpha>2}$ ↯

Alcuni esercizi (Integrazione)

Esercizio: Provare che $\displaystyle\int_x^1 \frac{dt}{1+t^2} = \int_1^{1/x} \frac{du}{1+u^2} \quad \forall x>0$

dim

$$F(x) = \int_x^1 \frac{dt}{1+t^2} \qquad F'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$G(x) = \int_1^{1/x} \frac{du}{1+u^2} \qquad G'(x) = \frac{1}{1+1/x^2}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{x^2}{x^2+1}\cdot\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{1+x^2}$$

Dunque $F'(x) = G'(x) \quad \forall x>0$

$\Rightarrow \quad F(x) = G(x) + c \quad \forall x>0$

ma

$F(1) = 0 = G(1)$

$\Rightarrow \quad F(x) = G(x) \quad \forall x>0$

2° modo

$$\int_x^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt = \Big[\operatorname{arctg} t\Big]_x^1 = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} x = F(x)$$

$$\int_1^{1/x} \frac{1}{1+u^2}\,du = \Big[\operatorname{arctg} u\Big]_1^{1/x} = \operatorname{arctg} 1/x - \operatorname{arctg} 1 = G(x)$$

Si vuole provare che $G(x) = F(x) \quad \forall x>0$

ovvero $\operatorname{arctg}\frac{1}{x} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} x \quad \forall x>0$

ovvero $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} 1/x = \pi/2 \quad \forall x>0$

Ma quest'ultima identità è stata provata $\checkmark$

Esercizio: Sia $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{e^t - e^2}\ (t-2)^\alpha}$

Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il carattere di $\int_2^{+\infty} f(t)\,dt$

dim

$f(t)$ è continua su $]2,+\infty[$, dunque debbo studiare la convergenza degli integrali impropri

$$\int_2^3 f(t)\,dt \quad e \quad \int_3^{+\infty} f(t)\,dt$$

(posso prendere in luogo di 3 un $\forall\, \bar{x} \in]2,+\infty[$!!)

1) Studio $\int_2^3 f(t)dt$. La funzione $f(t)$, in un intorno dx di $t=2$, diventa

$$f(t) = \frac{1}{e\cdot\sqrt{e^{t-2}-1}\ (t-2)^\alpha} \overset{\text{sviluppo } e^{t-2}}{=} \frac{1}{e\cdot\sqrt{1+(t-2)+o(t-2)-1}\ (t-2)^\alpha}$$

$$\overset{\text{raccogliendo } (t-2) \text{ dentro la radice}}{=} \frac{1}{e\cdot\sqrt{1+o(1)}\cdot(t-2)^{\alpha+\frac{1}{2}}} \quad \text{per } t \to 2^+$$

Ma allora $f(t) \sim \dfrac{1}{e\cdot(t-2)^{\alpha+\frac{1}{2}}}$ quando $t \to 2^+$

(infatti, $\lim_{t\to 2} \dfrac{f(t)}{e\cdot(t-2)^{-\alpha-\frac{1}{2}}} = 1$)

Adesso $\int_2^3 \dfrac{1}{e\,(t-2)^{\alpha+\frac{1}{2}}}dt \in \mathbb{R}$ se $\alpha+\frac{1}{2}<1$ se $\boxed{\alpha < \frac{1}{2}}$

e dunque, per il criterio del confronto asintotico, si ha che $\int_2^3 f(t)dt \in \mathbb{R}$ se $\boxed{\alpha < \frac{1}{2}}$

2) Studio di $\int_3^{+\infty} f(t)dt$. Quando $t \to +\infty$ si ha che

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{e^t - e^2}\cdot(t-2)^\alpha} \sim \frac{1}{e^{t/2}\cdot t^\alpha} \quad \text{quando } t \to +\infty$$

$$\left(\text{infatti } \lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{\frac{1}{e^{t/2}\cdot t^\alpha}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{e^{t/2}\cdot t^\alpha}{e^{t/2}\cdot t^\alpha}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-e^{2-t}}\cdot\left(1-\frac{2}{t}\right)^\alpha} = 1\right)$$

Preso $k \in \mathbb{N}$ $k > |\alpha| + 1$

$$e^{t/2} = \left(e^{t/2 \cdot 1/k}\right)^k \geq \left(1 + \frac{t}{2k}\right)^k > \frac{t^k}{(2k)^k} \quad \forall t \geq 2$$

e dunque

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{1-e^{2-t}} \cdot \left(1-\frac{1}{t}\right)^\alpha} \cdot \frac{1}{e^{t/2}\, t^\alpha} \leq \underbrace{\frac{(2k)^{2k}}{\sqrt{1-e^{2-t}} \cdot \left(1-\frac{1}{t}\right)^\alpha}}_{= c} \cdot \frac{1}{t^{k+\alpha}}$$

$$= \frac{c}{t^{k+\alpha}} \quad \forall t \geq 2$$

Si ha inoltre

$$\int_3^{+\infty} \frac{c}{t^{k+\alpha}}\, dt \in \mathbb{R} \text{ se } k+\alpha > 1 \text{ se } k > 1-\alpha$$

Essendo $k > |\alpha| + 1 \Rightarrow \int_3^{+\infty} \frac{c}{t^{k+\alpha}}\, dt \in \mathbb{R} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

Per il criterio del confronto n° 1 per gli integrali impropri si ha che $\int_3^{+\infty} f(t)\, dt \in \mathbb{R} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$ (ovvero converge sempre)

Dai punti 1) e 2) segue che

$$\int_2^{+\infty} f(t)\, dt \in \mathbb{R} \text{ se } \alpha < \frac{1}{2}$$

$\not{\!\downarrow}$

Esercizio: Sia $f(t)=\dfrac{\arctg(t)}{(t^2+1)^\alpha\, t^{3\alpha}}$

Studiare, al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$, il carattere di $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$

dim

$f(t)$ è continua su $]0,+\infty[$. Come nell'esercizio precedente si devono studiare i due integrali

$$\int_0^1 f(t)\,dt \quad e \quad \int_1^{+\infty} f(t)\,dt$$

1) Studio $\int_0^1 f(t)\,dt$. Quando $t\to 0$ si ha

$$f(t)=\frac{\arctg(t)}{(t^2+1)^\alpha\, t^{3\alpha}} \overset{\text{sviluppo arctg } t}{\underset{t^2=o(t)}{=}} \frac{t+o(t)}{[1+o(t)]^\alpha\, t^{3\alpha}} \sim \frac{1}{t^{3\alpha-1}} \quad (t\to 0)$$

infatti $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t^{1-3\alpha}}=\lim_{t\to 0}\frac{t+o(t)}{[1+o(t)]^\alpha\, t^{3\alpha}}\cdot t^{3\alpha-1}=\lim_{t\to 0}\frac{1+o(1)}{(1+o(1))^2}=1$

Si ha che $\int_0^1 \frac{dt}{t^{3\alpha-1}}\in\mathbb{R}$ se $3\alpha-1<1$ se $\alpha<2/3$

$\Rightarrow$ (Criterio confronto asintotico per gli integrali impropri) $\int_0^1 f(t)\,dt$ converge se $\alpha<2/3$

2) Studio $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$. Quando $t\to+\infty$

$$f(t)=\frac{\arctg(t)}{(t^2+1)^\alpha\, t^{3\alpha}} \sim \frac{\pi/2}{t^{2\alpha}t^{3\alpha}} \sim \frac{\pi}{2\,t^{5\alpha}} \quad \text{per } t\to+\infty$$

infatti $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\frac{f(t)}{\frac{\pi}{2t^{5\alpha}}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\arctg t}{\pi/2}\cdot\frac{t^{5\alpha}}{(t^2+1)^\alpha\cdot t^{3\alpha}}=1$

Ma $\int_1^{+\infty}\frac{\pi}{2t^{5\alpha}}\,dt\in\mathbb{R}$ se $5\alpha>1$ se $\alpha>1/5$

$\Rightarrow$ (Criterio confronto asintotico per integrali impropri) $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt\in\mathbb{R}$ se $\alpha>1/5$

Dai punti 1) e 2) si ottiene che

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt \in\mathbb{R} \quad \text{se} \quad \frac{1}{5}<\alpha<2/3$$

$$=+\infty \quad \text{se} \quad \alpha\notin\,]1/5, 2/3[$$

Esercizio: Sia $f(t) = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)\cos(\sqrt{t})$.

Studiare la convergenza dell'integrale improprio $\int_0^{\pi^2} f(t)\,dt$

dim

In questo caso f è continua $\forall x \in (0,\pi]$, e si ha che $\lim_{t \to 0^+} f(t) = -\infty$. Andiamo a vedere come si comporta $f(t)$ quando $t \to 0$

$$f(t) = \left(\frac{\sqrt{t}-1}{\sqrt{t}}\right)\cos(\sqrt{t}) \sim -\frac{1}{\sqrt{t}} \quad \text{per } t \to 0^+$$

Infatti $\lim_{t \to 0^+} \frac{f(t)}{-1/\sqrt{t}} = \lim_{t \to 0^+} \frac{\sqrt{t}-1}{\cancel{\sqrt{t}}} \cos(\sqrt{t}) \cdot (-\cancel{\sqrt{t}}) = 1$

Ma $\int_0^{\pi^2} \frac{dt}{\sqrt{t}} \in \mathbb{R} \Longrightarrow$ (criterio convergenza asintotica integrali impropri) $\int_0^{\pi^2} f(t)\,dt \in \mathbb{R}$ ↯

Esercizio: Calcolare, se esiste $\displaystyle\int_{-\infty}^{8} e^{\sqrt[3]{t}}\,dt$
dlim

$$\int_{-\infty}^{8} e^{\sqrt[3]{t}}\,dt \underset{t=-y}{=} \int_{-8}^{+\infty} e^{-\sqrt[3]{y}}\,dy = \int_{-8}^{+\infty} \frac{dy}{e^{\sqrt[3]{y}}}$$

Ma $e^{\sqrt[3]{y}} = \left(e^{\sqrt[3]{y}\cdot\frac{1}{6}}\right)^6 \geq \left(\frac{\sqrt[3]{y}}{6}\right)^6 + 1 = \frac{y^2}{6^6} + 1$ e dunque

$$\int_{-8}^{\beta} \frac{dy}{e^{\sqrt[3]{y}}} \leq \int_{-8}^{\beta} \frac{dy}{\frac{y^2}{6^6}+1} = \underbrace{\int_{-8}^{1} \frac{dy}{1+y^2/6^6}} + \int_{1}^{\beta} \frac{dy}{1+y^2/6^6}$$

Essendo $f(y) = \frac{1}{1+y^2/6^6}$ una funzione continua, $\int_{-8}^{1} f(y)\,dy \in \mathbb{R}$

Inoltre $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{dy}{1+\left(\frac{y}{6^3}\right)^2} = 6^3\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{1}{6^3}\right) \in \mathbb{R}$

ed essendo $e^{-\sqrt[3]{y}} > 0$ si ha che $\displaystyle\int_{-8}^{+\infty} e^{-\sqrt[3]{y}}\,dy$ esiste (finito o $+\infty$)

$\Rightarrow$ (Criterio Convergenza integrali impropri) $\displaystyle\int_{-8}^{+\infty} e^{-\sqrt[3]{y}}\,dy \in \mathbb{R}$

Calcoliamolo $\displaystyle\lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{8} e^{\sqrt[3]{t}}\,dt \underset{\substack{y=\sqrt[3]{t}\\ t=y^3\\ \frac{dt}{dy}=3y^2}}{=} \lim_{a\to-\infty} \int_{\sqrt[3]{a}}^{2} e^{y}\cdot 3y^2\,dy =$

$$= \lim_{a\to-\infty} \int_{\sqrt[3]{a}}^{2} e^{\sqrt[3]{t}}\,dt = \lim_{a\to-\infty} \left[3y^2e^y - 6ye^y + 6e^y\right]_{y=\sqrt[3]{a}}^{y=2}$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \left[12e^2 - 12e^2 + 6e^2 - 3a^{2/3}e^{\sqrt[3]{a}} + 6\sqrt[3]{a}\,e^{\sqrt[3]{a}} - 6e^{\sqrt[3]{a}}\right] = 6e^2$$

in quanto $\displaystyle\lim_{a\to-\infty} a^{2/3}e^{\sqrt[3]{a}} = \lim_{a\to-\infty} \sqrt[3]{a}\,e^{\sqrt[3]{a}} = \lim_{a\to-\infty} e^{\sqrt[3]{a}} = 0$

$$3\int y^2e^y\,dy = 3y^2e^y - 6\int ye^y = 3y^2e^y - 6ye^y + 6e^y + c$$

La prima parte, in cui si prova la convergenza dell'integrale, non è necessaria in quanto nel calcolare l'integrale si prova la convergenza stessa!