Integrali Impropri

La definizione dell'integrale di Riemann è stata data per delle funzioni $f: I \to \mathbb{R}$ t.c.

1) $I = [a,b]$ chiuso e limitato
2) f limitata.

Quando una o entrambe le condizioni sono violate, dobbiamo parlare di integrale "improprio" (per distinguerlo da quello proprio definito in precedenza)

Esempio (1° esempio fondamentale)

Studiare $\lim_{a \to 0^+} \int_a^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$

dim

(i) Se $\alpha \leq 0$ allora $f(t) = t^{-\alpha}$ è definita e continua su $[0,1]$, dunque è integrabile "propriamente" secondo Riemann e si ha $\int_0^1 t^{-\alpha} dt = \frac{1}{1-\alpha}$

Se $\alpha > 0$ allora $f(t) = t^{-\alpha}$ è definita e continua su $]0,1]$, e quindi non è definita in $x=0$, dove è divergente in quanto $\lim_{t \to 0^+} t^{-\alpha} = +\infty$

(ii) $\alpha = 1$ $\int_a^1 \frac{dt}{t} = \left[\log t\right]_{t=a}^{t=1} = -\log a \xrightarrow[a \to 0^+]{} +\infty$

(iii) $\alpha \neq 1$ $\int_a^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_{t=a}^{t=1} = \frac{1}{1-\alpha} - \frac{a^{1-\alpha}}{1-\alpha} \xrightarrow[a \to 0^+]{} \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{se } 1-\alpha > 0 \\ -\infty & \text{se } 1-\alpha < 0 \end{cases}$

(i) + (ii) + (iii) mi dicono che

$$\lim_{a \to 0^+} \int_a^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}, & \text{se } \alpha < 1 \\ +\infty, & \text{se } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

↯

Esempio (2° esempio fondamentale)

Studiare $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{dt}{t^\alpha}$ al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$

dim.

In questo caso $f(t)=1/t^\alpha$ è continua $\forall t\in[1,+\infty[$, ma questo è un integrale improprio poiché l'intervallo è illimitato.

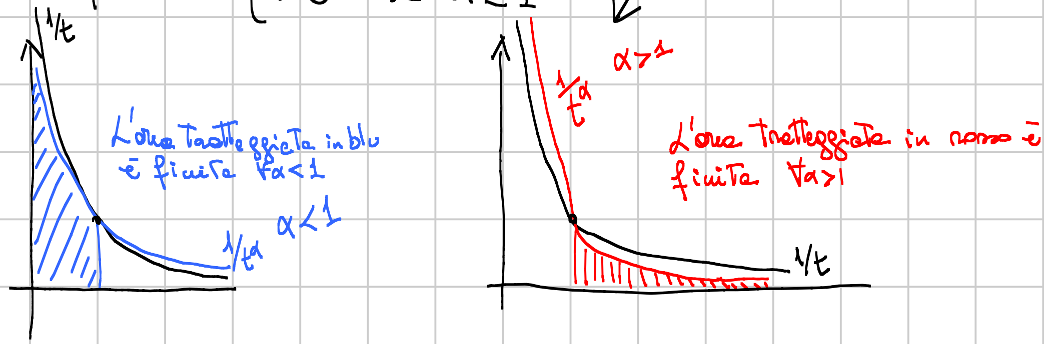
Separiamo al solito il caso $\alpha=1$ dagli altri casi

$$\alpha=1 \qquad \int_1^b \frac{dt}{t}=\left[\log t\right]_{t=1}^{t=b}=\log b \xrightarrow[b\to+\infty]{} +\infty$$

$$\alpha\neq1 \qquad \int_1^b \frac{dt}{t^\alpha}=\left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^b=\frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\frac{1}{1-\alpha}\xrightarrow[b\to+\infty]{}\begin{cases}\frac{1}{\alpha-1} & 1-\alpha<0\\ +\infty & 1-\alpha>0\end{cases}$$

Ne segue che

$$\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dt}{t^\alpha}=\begin{cases}\frac{1}{\alpha-1} & \text{se } \alpha>1\\ +\infty & \text{se } \alpha\le1\end{cases}$$



La funzione $f(t)=1/t^\alpha$ è l'integrando con cui ci si confronterà nella quasi totalità dei casi.

Def (Integrale generalizzato o improprio)

Sia $f:[a,b[\,\to\mathbb{R}$ una funzione R-integrabile su $[a,\beta]$ $\forall\beta\in[a,b[$

(i) Se $\exists\lim\limits_{\beta\to b^-}\int_a^\beta f(t)dt=\int_a^b f(t)dt\in\mathbb{R}$ allora "f è integrabile impropriamente su $[a,b[$"

(ii) Se " $=+\infty\ (-\infty)$ allora "f ha integrale improprio divergente su $[a,b[$"

(iii) Se $\nexists\lim\limits_{\beta\to b^-}\int_a^\beta f(t)dt$ allora non ha senso parlare di integrale improprio di f su $[a,b[$

Più in generale si può dare la seguente definizione

Def (Integrale improprio - definizione generale)

Data $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ R-integrabile su $[\alpha,\beta]$ $\forall \alpha,\beta \in]a,b[$, preso un $\forall c \in]a,b[$
"f integrabile impropriamente su $]a,b[$" **se** f int. impropriamente su $]a,c]$ e su $[c,b[$,

e porremo $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$

Se $\left(\int_a^c f dt = +\infty \text{ e } \int_c^b f dt \in \mathbb{R}\right)$ o $\left(\int_a^c f dt \in \mathbb{R} \text{ e } \int_c^b f dt = +\infty\right)$ allora

"f ha integrale improprio divergente a $+\infty$" e si scrive $\int_a^b f(t)dt = +\infty$

Se $\left(\int_a^c f dt = -\infty \text{ e } \int_c^b f dt \in \mathbb{R}\right)$ o $\left(\int_a^c f dt \in \mathbb{R} \text{ e } \int_c^b f dt = -\infty\right)$ allora

"f ha integrale improprio divergente a $-\infty$" e si scrive $\int_a^b f(t)dt = -\infty$

In tutti gli altri casi l'integrale improprio $\nexists$.

La teoria degli integrali impropri presenta molte analogie alla teoria delle serie numeriche.

Ad esempio ricordiamo che una serie a termini positivi o converge o diverge positivamente

Teorema ($f \geq 0$ allora integrale improprio converge o diverge)

Sia $f: [a,b[\to \mathbb{R}$ una funzione integrabile su $[a,\beta]$ $\forall \beta \in [a,b[$

Se $f(x) \geq 0$ $\forall x \in [a,b[$ allora $\int_a^b f(t)dt$ converge o diverge a $+\infty$

dim

Proviamo che $F(\beta) = \int_a^\beta f(t)dt$ è crescente debolmente su $[a,b[$

Presi $x<y$, si ha $F(y)-F(x) = \int_a^y f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \overset{\text{Teorema Chasles}}{=} \int_x^y f(t)dt$

Essendo $f(t) \geq 0$ $\forall t \in [a,b[\Rightarrow f(t) \geq 0$ $\forall t \in [x,y]$

$\Rightarrow$ (Teorema Confronto) $\int_x^y f(t)dt \geq 0 = \int_x^y f(t)dt$

Essendo crescente $F(\beta)$, necessariamente $\exists \lim_{\beta \to b^-} F(\beta)$

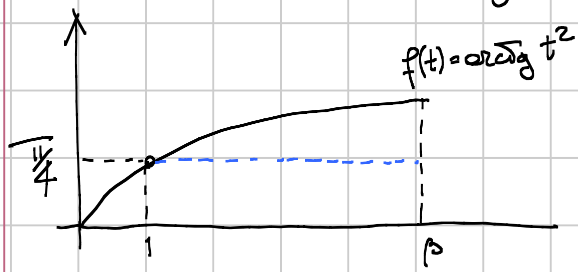
e questo può $\in \mathbb{R}$ o essere $+\infty$ $\lightning$

Esercizio Studiare $\displaystyle\int_0^{+\infty} \operatorname{arctg} t^2\, dt$

dim

la funzione $f(t)=\operatorname{arctg} t^2$ è continua su $[0,+\infty[$, e dunque è integrabile su $[0,\beta]$ $\forall \beta \in [0,+\infty[$: quindi ha senso considerare

$$\lim_{\beta\to+\infty} \int_0^\beta \operatorname{arctg} t^2\, dt$$



La funzione $f(t)$ è crescente su $[0,+\infty[$: $f'(t)=\dfrac{2t}{1+t^4}>0$ $\forall t>0$ e si ha $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=\frac{\pi}{2}$

Essendo crescente, $\forall x>1$ $\operatorname{arctg} t^2 > \operatorname{arctg} 1 = \pi/4$

$\Rightarrow$ (Teorema Confronto integrali Riemann)

$$\int_0^\beta f(t)dt = \int_0^1 f(t)dt + \int_1^\beta f(t)dt \geq$$
$$\geq \int_0^1 f(t)dt + \frac{\pi}{4}(\beta-1)$$

ovvero $\displaystyle\int_0^\beta f(t)\,dt \geq \int_0^1 f(t)dt + \frac{\pi}{4}(\beta-1) \xrightarrow[\beta\to+\infty]{} +\infty$

$\Rightarrow$ (Teorema Confronto limiti) $\displaystyle\lim_{\beta\to+\infty}\int_0^\beta f(t)dt = +\infty$

Oss: Questo esempio suggerisce che per gli integrali impropri debba valere una sorta di "condizione necessaria" per l'integrale improprio analoga a quella provata per le serie

Teorema (una condizione necessaria)

Sia $f: [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ tale che f integrabile su $[a,\beta]$, $\forall \beta > a$.

(ii) $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell \geq 0$

(iii) $\exists \displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt \in \mathbb{R}$

Allora $\ell = 0$

dim

La dimostrazione è analoga allo svolgimento del precedente esercizio

Assurdo $\ell>0$: per definizione di limite

$$\forall \varepsilon>0\ \exists N>0 : \forall x>N \quad \ell-\varepsilon<f(x)<\ell+\varepsilon$$

Fisso $\varepsilon=\ell/2$ $\quad \exists N>0 : \forall x>N \quad \ell/2<f(x)$

e dunque, $\forall \beta\geq N$

$$\int_a^\beta f(t)\,dt = \int_a^N f(t)\,dt + \int_N^\beta f(t)\,dt \geq \underbrace{\int_a^N f(t)\,dt + \frac{\ell}{2}(\beta-N)}_{\xrightarrow{\beta\to+\infty}\ +\infty}$$

$\Rightarrow$ (Teorema Confronto) $\lim\limits_{\beta\to+\infty}\int_a^\beta f(t)\,dt=+\infty$ Assurdo

Ne segue la Tesi ↯

Esercizio: Studiare $\int_0^{+\infty}\cos x\,dx$

$\forall \beta\in\mathbb{R}$ $\quad \int_0^\beta \cos x\,dx = \left[\operatorname{sen} x\right]_{x=0}^{x=\beta} = \operatorname{sen}\beta \ \not\xrightarrow{\beta\to+\infty}$

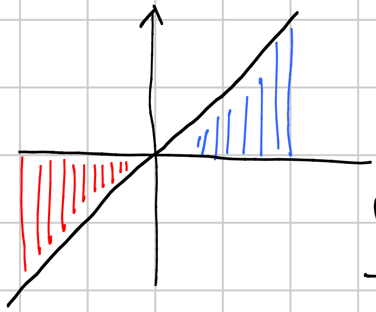
e dunque $\nexists \int_0^{+\infty}\cos x\,dx$ ↯

Esercizio: Studiare $\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx$

dim

Siamo tentati da $\lim\limits_{\beta\to+\infty}\int_{-\beta}^{\beta} x\,dx = 0$, ma non è corretto: infatti $\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx = \int_{-\infty}^{0} x\,dx + \int_{0}^{+\infty} x\,dx$, e si ha

$$\int_{-\infty}^{0} x\,dx=-\infty \qquad \int_{0}^{+\infty} x\,dx=+\infty$$



Volendo convincersi in altro modo

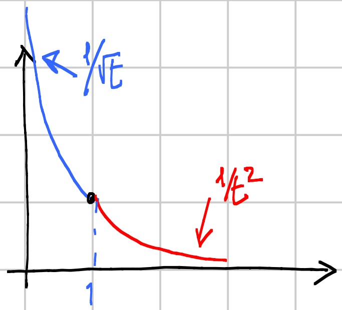
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx = \int_{-\infty}^{0} x\,dx + \int_{0}^{+\infty} x\,dx = \lim_{z\to+\infty}\int_{-z^2}^{z} x\,dx$$

$$= \lim_{z\to+\infty}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=-z^2}^{x=z} = \lim_{z\to+\infty}\left(\frac{z^2}{2}-\frac{z^4}{2}\right) = -\infty \qquad ↯$$

Alcuni problemi

Problema 1: Dato $f:]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ t.c. $\sup f(]0,+\infty[) = +\infty$ allora $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ diverge?

NO! Presa $f(t) = \begin{cases} 1/\sqrt{t} & \text{se } t \in [0,1] \\ 1/t^2 & \text{se } t \in]1,+\infty[\end{cases}$



$$\int_0^{+\infty} f(t)dt = \int_0^1 f(t)dt + \int_1^{+\infty} f(t)dt$$

$$= \lim_{\alpha\to 0^+} \int_\alpha^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} + \lim_{\beta\to+\infty} \int_1^\beta \frac{dt}{t^2} =$$

$$= \lim_{\alpha\to 0^+} \left[2\sqrt{t}\right]_{t=\alpha}^{t=1} + \lim_{\beta\to+\infty} \left[-\frac{1}{t}\right]_{t=1}^{t=\beta}$$

$$= \lim_{\alpha\to 0^+} \left[2 - 2\sqrt{\alpha}\right] + \lim_{\beta\to+\infty} \left[-\frac{1}{\beta} + 1\right] = 2 + 1 = 3 \ ↯$$

Problema 2: Se $f: [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ limitata allora $\int_0^{+\infty} f(t)dt \in \mathbb{R}$?

NO! Si prenda $f(t) = 1 \ \forall t \geq 0$: $\int_0^{+\infty} 1 = +\infty$

Problema 3: Se $f: [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ è limitata e $\lim_{x\to+\infty} f(t) = 0$ allora $\int_0^{+\infty} f(t)dt \in \mathbb{R}$?

NO! Si prenda $f(t) = \frac{2t}{1+t^2}$: è continua, positiva $\forall t > 0$ e si ha $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$, ma

$$\lim_{\beta\to+\infty} \int_1^\beta \frac{2t}{1+t^2} dt = \lim_{\beta\to+\infty} \left[\log(1+t^2)\right]_{t=1}^{t=\beta} = \lim_{\beta\to+\infty} \left(\log(1+\beta^2) - \log 2\right) = +\infty \ ↯$$

Esercizio: Determinate la relazione tra i parametri a, e b in modo che $\lim_{a\to-\infty}\int_a^0 x\,dx + \lim_{b\to+\infty}\int_0^b x\,dx = 2$

dim

è necessario che $\lim_{a\to-\infty}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=a}^{x=0} + \lim_{b\to+\infty}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=b} = 2$

ovvero $\lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}}\left(-\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}\right) = \lim_{a\to+\infty}\frac{1}{2}(4) = 2$

$\boxed{b^2-a^2=4}$ questa è la relazione tra a e b

$b = \pm\sqrt{a^2+4}$

↯

Criteri di convergenza per integrali impropri

Teorema (Criterio confronto con funzione integrabile senso improprio)

Siano $f, \varphi : [a,b[\to \mathbb{R}$ che soddisfano le seguenti ipotesi

(i) f continua su $[a,b[$

(ii) $|f(x)| \leq \varphi(x) \quad \forall x \in [a,b[$

(iii) $\int_a^b \varphi(t)dt \in \mathbb{R}$ (ovvero φ è integrabile senso improprio su $[a,b[$)

Allora $\int_a^b f(t)dt \in \mathbb{R}$

dim

Per l'ipotesi (i), f continua su $[a,\beta]$ $\forall \beta \in [a,\beta]$ e dunque f è integrabile su $[a,\beta]$ $\forall \beta \in [a,b[$. Ma posso calcolare

$$\lim_{\beta \to b^-} \int_a^\beta f(t)dt$$

$f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ e $|f|(x) = f^+(x) + f^-(x)$

$0 \leq f^+(x) + f^-(x) = |f|(x) \leq \varphi(x) \quad \forall x \in [a,b[$ (ipotesi (ii))

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} 0 \leq f^+(x) \leq \varphi(x) \\ 0 \leq f^-(x) \leq \varphi(x) \end{cases} \quad \forall x \in [a,b[$$

① Provo integrabilità impropria di $f^+(x)$

$F^+(x) = \int_a^x f^+(t)dt$: essendo $f^+ \geq 0$, si ha che $F^+(x)$ è crescente debol.

$\Rightarrow \exists \lim_{x \to b^-} F^+(x) = \lim_{\beta \to b^-} \int_a^\beta f^+(t)dt$ che può essere $\in \mathbb{R}$ oppure $+\infty$

Ma $f^+(t) \leq \varphi(t) \quad \forall t \in [a,b[$

$\Rightarrow$ (Teorema Confronto Integrale Riemann) $\int_a^\beta f^+(t)dt \leq \int_a^\beta \varphi(t)dt \quad \forall \beta \in [a,b[$

$\Rightarrow$ (Teorema Confronto tra limiti) $\int_a^b f^+(t)dt \leq \int_a^b \varphi(t)dt \in \mathbb{R}$

e dunque $\int_a^b f^+(t)dt \in \mathbb{R}$

Analogamente si prova $\int_a^b f^-(t)dt \in \mathbb{R}$ e dunque

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f^+(t)dt - \int_a^b f^-(t)dt \in \mathbb{R}$$

Esempio: Provare che $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x+1}{x^2+1}\,dx$ clim

$f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x+1}{x^2+1}$ è continua su $[0,+\infty[$ (i)

inoltre $f(x) \geq 0 \ \forall x \in [0,+\infty[$ e dunque

$F(\beta) = \displaystyle\int_0^{\beta} f(t)\,dt$ è una funzione debolmente crescente

$\Rightarrow \exists \displaystyle\lim_{\beta \to +\infty} F(\beta) = \int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ che può essere $\in \mathbb{R}$ oppure $+\infty$

$$|f(x)| \leq \frac{1+|\operatorname{sen} x|}{1+x^2} \leq \frac{2}{1+x^2} = \varphi(x) \quad \forall x \in [0,+\infty[\quad \text{(ii)}$$

Si ha che

$$\left.\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \varphi(t)\,dt &= \int_0^{+\infty} \frac{2}{1+t^2}\,dt = \lim_{\beta \to +\infty} \left[2 \operatorname{arctg} t\right]_{t=0}^{t=\beta} = \\ &= 2 \lim_{\beta \to +\infty} \operatorname{arctg} \beta = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi \end{aligned}\right\} \text{(iii)}$$

Sono verificate le ipotesi (i) (ii) e (iii) del criterio del confronto per l'integrale improprio

$\Rightarrow \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \in \mathbb{R}$

Teorema ($f,g: [a,b[\to \mathbb{R}$ $f \sim g$ $x \to b$ $\Rightarrow$ $\int_a^b f\,dt$ conv.\div sse $\int_a^b g\,dt$ conv.\div.)

Siano $f,g: [a,b[\to \mathbb{R}$. Se sono verificate le seguenti ipotesi

(i) f,g continue $\forall x \in [a,b[$

(ii) $f(x), g(x) \geq 0$ $\forall x \in [a,b[$

(iii) $\exists \lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \in]0,+\infty[$

Allora

$\int_a^b f(t)\,dt$ converge (diverge) sse $\int_a^b g(t)\,dt$ converge (diverge)

dim

$f(t) \geq 0$ $\forall t \in [a,b[$ $\Longrightarrow$ $F(\beta) = \int_a^\beta f(t)\,dt$ è debolmente crescente $\forall \beta \in [a,b[$

$\Longrightarrow$ $\int_a^b f(t)\,dt$ può $\begin{cases} \in \mathbb{R} \\ \text{oppure} \\ \text{è } = +\infty \ (-\infty) \end{cases}$

$g(t) \geq 0$ $\forall t \in [a,b[$ $\Longrightarrow$ $G(\beta) = \int_a^\beta g(t)\,dt$ è debolmente crescente $\forall \beta \in [a,b[$

$\Longrightarrow$ $\int_a^b g(t)\,dt$ può $\begin{cases} \in \mathbb{R} \\ \text{oppure} \\ \text{è } = +\infty \ (-\infty) \end{cases}$

Per ipotesi $\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \in]0,+\infty[$

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ $b - \delta < x < b \Rightarrow \ell - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < \ell + \varepsilon$

$\varepsilon = \frac{\ell}{2}$ $\exists \delta > 0$: $b - \delta < x < b \Rightarrow \frac{\ell}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3}{2}\ell$

ovvero $\boxed{\frac{\ell}{2} \cdot g(x) \underset{①}{\leq} f(x) \underset{②}{\leq} \left(\frac{3}{2}\ell\right) g(x) \quad \forall x \in [b-\delta, b]}$ (*)

La disuguaglianza (*) permette di concludere

$\int_a^b f(t)\,dt \in \mathbb{R}$ $\Longrightarrow$ (Usando (*) ①) $\int_a^b \frac{\ell}{2} g(t)\,dt \in \mathbb{R}$

$\Longrightarrow$ $\int_a^b g(t)\,dt \in \mathbb{R}$

ovvero

$\int_a^b f\,dt = +\infty$ $\Longrightarrow$ (Usando (*) ②) $\frac{3\ell}{2} \int_a^b g\,dt \in \mathbb{R}$

Partendo da $\int_a^b g\,dt$

$$\int_a^b g(t)\,dt \in \mathbb{R} \Rightarrow \int_a^b \left(\frac{3}{2}\ell\right) g(t)\,dt \in \mathbb{R} \underset{\text{per la } (*)\ 2}{\Rightarrow} \int_a^b f\,dt \in \mathbb{R}$$

$$\int_a^b g(t)\,dt = +\infty \underset{\text{per la } (*)\ 1}{\Rightarrow} \int_a^b \frac{\ell}{2} g(t) = +\infty \Rightarrow \int_a^b f(t)\,dt = +\infty$$

Esercizio Studiare $\int_0^1 \left(\frac{1}{\operatorname{sen} t} - \frac{1}{t}\right) dt$

dim

L'intervallo $]0,1]$ è limitato.

$$f(t) = \frac{t - \operatorname{sen} t}{t \cdot \operatorname{sen} t} \geq 0 \quad \forall t \in]0,1] \Rightarrow \int_0^1 f(t)\,dt \begin{cases} \in \mathbb{R} \\ \text{oppure} \\ = +\infty \end{cases}$$

Vediamo il comportamento asintotico per $t \to 0^+$

$$f(t) = \frac{t - (t - \frac{t^3}{6} + o(t^4))}{t \cdot (t + o(t^2))} = \frac{\frac{t^3}{6} + o(t^4)}{t^2 + o(t^3)} = \frac{t}{6} \cdot \frac{1 + o(t)}{1 + o(1)}$$

$$= \frac{t}{6} \cdot (1 + o(t))(1 + o(1)) = \frac{t}{6} + o(t^2) \quad (t \to 0)$$

$\left(\frac{1}{1+o(1)} = 1 + o(1) \text{ per } t \to 0\right)$ e dunque $\lim_{t \to 0} \frac{f(t)}{t/6} = 1$ da cui

per il Criterio del Confronto asintotico

$\int_0^1 f(t)\,dt$ converge se $\int_0^1 \frac{t}{6}\,dt$ converge

e dunque $\int_0^1 f(t)\,dt$ converge

$$\frac{\sqrt{1+x^2} - x}{\sqrt{x}}$$

Esercizio: Studiare la convergenza di

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x^2} - x}{\sqrt{x}}\,dx$$

dim

$$f(t) = \frac{\sqrt{1+t^2} - t}{\sqrt{t}} \text{ è continua e positiva su }]0,+\infty[$$

$$= \frac{1 + t^2 - t^2}{\sqrt{t}\left(\sqrt{1+t^2} + t\right)} = \frac{1}{\sqrt{t}\left(t + \sqrt{1+t^2}\right)}$$

In questo caso ho un doppio problema
in $t=0^+$ dove la funzione diverge a $+\infty$
in $t=+\infty$ perché l'intervallo è illimitato
Quindi devono convergere i due integrali
$$\int_0^1 f(t)dt \quad e \quad \int_1^{+\infty} f(t)dt$$

- Vediamo $\int_0^1 f(t)dt$

Quando $t \to 0$ $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}(\sqrt{1+t^2}+t)} \sim \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ infatti $\dfrac{f(t)}{1/\sqrt{t}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}+t} \xrightarrow[t\to 0^+]{} 1$

Per il Criterio del confronto asintotico
$$\int_0^1 f(t)dt \in \mathbb{R} \quad \text{sse} \quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}dt \in \mathbb{R}$$
Ma $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} \in \mathbb{R}$, e dunque $\int_0^1 f(t)dt \in \mathbb{R}$ (a)

- Vediamo $\int_1^{+\infty} f(t)dt$.

Quando $t \to +\infty$ $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}(\sqrt{1+t^2}+t)} = \dfrac{1}{t^{3/2}} \cdot \dfrac{1}{1+\sqrt{1+1/t^2}} \sim \dfrac{1}{2t^{3/2}}$

infatti $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{f(t)}{1/2t^{3/2}} = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{2}{1+\sqrt{1+1/t^2}} = 1$

Dunque per il Criterio del confronto asintotico
$$\int_1^{+\infty} f(t)dt \in \mathbb{R} \quad \text{sse} \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{2t^{3/2}}dt \in \mathbb{R}$$
Essendo $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2t^{3/2}}dt \in \mathbb{R}$, ne segue che $\int_1^{+\infty} f(t)dt \in \mathbb{R}$ (b)

Da (a) e (b) segue $\int_0^{+\infty} f(t)dt \in \mathbb{R}$ ✓

Esercizio: Calcolate $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_2^x \frac{dt}{\log t}$

dim

Vorrei applicare il Teorema dell'Hôpital nella forma ∞/∞.
Per questo ho bisogno di provare che
$$\int_2^x \frac{dt}{\log t} = +\infty$$
Osservo che $1/\log t > 0 \ \forall t \geq 2$, dunque $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{\log t}$ esiste $\in \mathbb{R}$ or $+\infty$

Ora $\log t \leq t-1 \ \forall t \geq 2 \Rightarrow \dfrac{1}{\log t} \geq \dfrac{1}{t-1} \ \forall t \geq 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ (Teorema Confronto Int. Riemann) $\displaystyle\int_2^{\beta} \frac{dt}{\log t} \geq \int_2^{\beta} \frac{dt}{t-1} = \int_1^{\beta-1} \frac{dy}{y} = \log(\beta-1) \quad \forall \beta > 2$

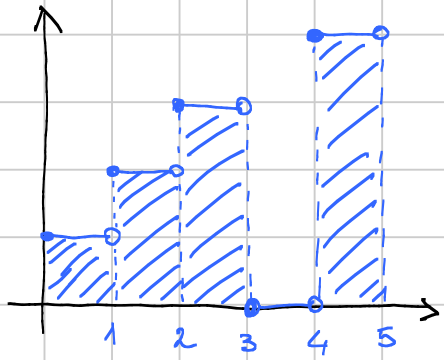
$\log(\beta-1) \xrightarrow{\beta \to +\infty} +\infty$

$\Rightarrow$ (Criterio Confronto per limiti) $\displaystyle\lim_{\beta \to +\infty} \int_2^{\beta} \frac{dt}{\log t} = +\infty$

Posso applicare Hôpital $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \int_2^{x} \frac{dt}{\log t} \overset{(H)}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\log x} = 0^+ \quad \lightning$

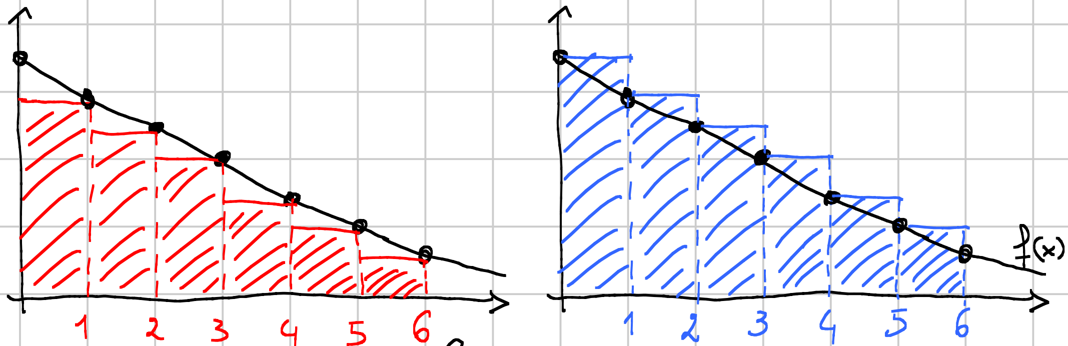
Confronto Serie - Integrale Improprio

Supponiamo $a_n \geq 0 \ \forall n$. Quando considero $\sum_{k=0}^{n} a_k$ stiamo calcolando l'area della funzione



$$f(x) = \begin{cases} a_0 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ a_1 & \text{se } 1 \leq x < 2 \\ a_2 & \text{se } 2 \leq x < 3 \\ & \\ a_n & \text{se } n \leq x < n+1 \end{cases}$$

In particolare, data una funzione $f: [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ debolmente decrescente, si ha che



$$\sum_{k=0}^{5} f(k+1) \leq \int_0^6 f(t)\,dt \leq \sum_{k=0}^{5} f(k)$$

ovvero posso approssimare il mio integrale con delle sommatorie. Ponendo al limite per $n \to +\infty$ si dimostra il seguente

Teorema (Confronto Serie - Integrale Improprio)

Sia $f:[a,+\infty[\to [0,+\infty[$ debolmente decrescente, $a \geq 0$

Allora sono tra loro equivalenti le seguenti affermazioni

(i) $\int_a^{+\infty} f(t)dt \in \mathbb{R}$ $(=+\infty)$

(ii) $\sum_{n \geq [a]} f(n)$ converge (diverge positivamente)

dim

Non è restrittivo supporre $a=0$: si deve introdurre

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(a) & 0 \leq x < a \\ f(x) & x \geq a \end{cases}$$

Essendo f debolmente decrescente, nell'intervallo $[0,n]$ questa è integrabile secondo Riemann. Inoltre, essendo $f \geq 0$ si ha che $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ esiste $\begin{cases} \in \mathbb{R} \\ +\infty \end{cases}$

Analogamente la serie $\sum_{n \geq 0} f(n)$ è una serie a termini positivi, e dunque o converge o diverge a $+\infty$

$f(1) \leq f(x) \leq f(0) \quad x \in [0,1]$

$f(2) \leq f(x) \leq f(1) \quad x \in [1,2]$

$\Longrightarrow$ (Teorema Confronto integrale Riemann)

$f(1) = \int_0^1 f(1)dt \leq \int_0^1 f(t)dt \leq \int_0^1 f(0)dt = f(0)$

$f(2) = \int_1^2 f(2)dt \leq \int_1^2 f(t)dt \leq \int_1^2 f(1)dt = f(1)$

$f(n) \leq f(x) \leq f(n-1) \quad x \in [n-1,n]$

$f(n) = \int_{n-1}^n f(n)dt \leq \int_{n-1}^n f(t)dt \leq \int_{n-1}^n f(n-1)dt = f(n-1)$

$$\Rightarrow f(1) + \dots + f(n) \leq \int_0^n f(t)dt \leq f(0) + f(1) + \dots + f(n-1)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n f(k) \leq \int_0^n f(t)dt \leq \sum_{k=0}^{n-1} f(k)$$

Passando al limite si ottiene la Tesi infatti si ha

- $\int_0^{+\infty} f(t)dt \in \mathbb{R} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} f(k) \in \mathbb{R}$ ovvero converge anche la serie
- $\int_0^{+\infty} f(t)dt = +\infty \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} f(k) = +\infty$
- $\sum_{k=0}^{\infty} f(k) \in \mathbb{R} \Rightarrow \int_0^{\infty} f(t)dt \in \mathbb{R}$
- $\sum_{k=0}^{\infty} f(k) = +\infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} f(k) = \infty \Rightarrow \int_0^{\infty} f(t)dt = +\infty$

$\mathcal{Y}$

Esercizio $\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$ converge se $\alpha > 1$
diverge a $+\infty$ se $\alpha \leq 1$

dim

Il caso $\alpha \leq 0$ segue dalla violazione della condizione necessaria $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \geq \lim_{n\to+\infty} 1 = 1 \neq 0$

Nel caso $\alpha > 0$, $f(n) = \frac{1}{n^\alpha}$ e la funzione $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ è una funzione decrescente dunque per il Criterio Confronto Integrale $\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$ converge (diverge) se $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ converge (diverge)

Dovendo essere $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \begin{cases} \in \mathbb{R} & \text{se } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha \leq 1 \end{cases}$

Ne segue che $\sum_n \frac{1}{n^\alpha} \begin{cases} \text{converge se } \alpha > 1 \\ \text{diverge a } +\infty \text{ se } \alpha \leq 1 \end{cases}$ $\lightning$

Esercizio: Studiare la convergenza di $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(\log n)^\alpha}$
al variare di $\alpha > 0$

dim

$f(x) = \frac{1}{x(\log x)^\alpha}$ è debolmente decrescente su $[2, +\infty[$ $\forall \alpha > 0$

Dunque, per il Criterio Confronto con l'Integrale Improprio, la serie $\sum_n f(n)$ converge se $\int_2^{+\infty} f(t)\,dt$

Studiamo $\int_2^{+\infty} f(t)\,dt = \int_2^{+\infty} \frac{dt}{t(\log t)^\alpha} = \lim_{a\to+\infty} \int_2^{a} \frac{dt}{t(\log t)^\alpha}$

$y = \log t$, $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t}$

$= \lim_{a\to+\infty} \int_{\log 2}^{\log a} \frac{dy}{y^\alpha} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha \leq 1 \\ \frac{(\log 2)^{1-\alpha}}{\alpha - 1} & \alpha > 1 \end{cases}$

Ne segue che $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(\log n)^\alpha} \begin{cases} \text{converge se } \alpha > 1 \\ \text{diverge se } \alpha \leq 1 \end{cases}$ $\lightning$

Esercizio: Studiare la convergenza di $\sum_{n\geq 10} \frac{1}{n \cdot (\log n)(\log \log n)^\alpha}$
al variare di $\alpha > 0$

(N.B. si procede come nell'esercizio precedente, ma si sostituisce 2 volte)