Verso il Teorema Fondamentale del calcolo

Teorema (della media integrale)

Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione R-integrabile, allora

$$\inf f([a,b]) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le \sup f([a,b]).$$

dim

$$\inf f([a,b]) \le f(x) \le \sup f([a,b]) \quad \forall x\in[a,b]$$

$+$

$\inf f([a,b])$, f, $\sup f([a,b])$ sono R-integrabili

$\Downarrow$ (Teorema del confronto)

$$\int_a^b \inf f([a,b])\,dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b \sup f([a,b])\,dx$$

$\Downarrow$

$$(b-a)\cdot\inf f([a,b]) \le \int_a^b f(x)dx \le (b-a)\sup f([a,b])$$

e dividendo per $(b-a)$ si ottiene la Tesi $\swarrow$

Corollario (del Teorema della Media Integrale)

Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ è continua

allora $\exists z\in[a,b]$ t.c. $f(z)=\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx$

dim

f continua $\Rightarrow f$ R-integrabile $\overset{\text{Teorema Media}}{\Rightarrow} \inf f([a,b]) \le \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f\,dx \le \sup f([a,b])$

f continua $\overset{\text{Teorema Weierstrass}}{\Rightarrow}$ $m=\min f([a,b]) \le \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx \le \max f([a,b]) = M$

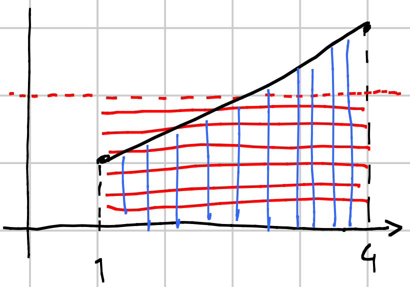
Ma per il Teorema dei Valori Intermedi

$f([a,b])=[m,M]$ ove $m=\min f([a,b])$ $M=\max f([a,b])$

e dunque, essendo $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx\in[m,M]$,

$$\exists z\in[a,b] \text{ t.c. } f(z)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \quad \swarrow$$

Esempio (relativo al Teorema Media)



$f(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) = \frac{1}{2}(x+1)$

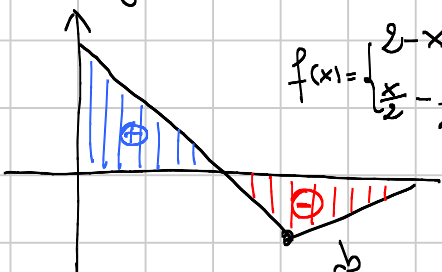
$\int_1^4 f(x)dx = \int_1^4 \frac{1}{2}(x-1) \overset{\text{graficamente}}{=} 8$

$\frac{1}{5-1}\int_1^4 f(x)dx = 2$

Il numero 2 è l'altezza del rettangolo di base $b-a=4$ che ha la stessa area del sottografico di $f(x)$ nell'intervallo $[1,4]$.

Orientare l'intervallo [a,b]

Sino ad ora abbiamo pensato a $\int_a^b f(x)dx$ come una sommatoria (il simbolo "$\int$" è in effetti una S allungata) di aree, positive se sopra l'asse x e negative se collocate sotto l'asse x



$f(x) = \begin{cases} 2-x & 0 \le x < 3 \\ \frac{x}{2} - \frac{5}{2} & 3 < x \le 5 \end{cases}$

$\int_0^5 f(x)dx = \int_0^3 f(x)dx + \int_3^5 f(x)dx$

$= 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$

In ogni caso, $\int_a^b f(x)dx$ ha senso quando $a \le b$!!

Che senso posso dare a $\int_3^2 f(x)dx$?

Il significato più ragionevole è il seguente

$$\int_3^2 f(x)dx = -\int_2^3 f(x)dx$$

ovvero, in generale, dato $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ R-integrabile

$$\forall \alpha,\beta \in [a,b] \quad \int_\alpha^\beta f(x)dx \underset{\text{def}}{=} \begin{cases} \int_\alpha^\beta f(x)dx & \text{se } \alpha \le \beta \\ -\int_\beta^\alpha f(x)dx & \text{se } \alpha > \beta \end{cases}$$

OSS: che questa sia una "buona" definizione lo si capisce studiando il lavoro fatto da una forza che agisce su una particella che si muove su una retta (la forza diretta lungo la retta)

- $\begin{cases} \text{se la particella si muove nel verso di } F \\ \text{allora la forza compie un lavoro positivo} \end{cases}$

mentre

- $\begin{cases} \text{se la particella si muove nel verso opposto a quello di } F \\ \text{allora la forza compie un lavoro negativo} \end{cases}$

Tutti i teoremi provati in precedenza continuano a valere, con la precauzione seguente

Teorema (del confronto)

$f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ R-integrabili, $f(x)\le g(x)$ $\forall x\in[a,b]$

allora $\forall \alpha,\beta\in[a,b]$

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx \begin{cases} \le \int_\alpha^\beta g(x)\,dx & \text{se } \alpha\le\beta \\ \ge \int_\alpha^\beta g(x)\,dx & \text{se } \alpha>\beta \end{cases}$$

infatti

se $\alpha>\beta$ allora $\int_\alpha^\beta f(x)dx = -\int_\beta^\alpha f(x)dx \ge -\int_\beta^\alpha g(x)dx = \int_\alpha^\beta g(x)dx$

Bisogna modificare leggermente pure

Teorema (f R-integrabile $\Rightarrow |f|$ R-integrabile)

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ R-integrabile $\Longrightarrow |f|$ è R-integrabile e

$$\forall \alpha,\beta\in[a,b] \quad \left|\int_\alpha^\beta f(x)dx\right| \le \left|\int_\alpha^\beta |f|(x)dx\right| = \begin{cases} \int_\alpha^\beta |f|(x)dx & \text{se } \alpha\le\beta \\ -\int_\alpha^\beta |f|(x)dx & \text{se } \alpha>\beta \end{cases}$$

Teorema (di Chasles - intervalli orientati)

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ R-integrabile

Allora $\forall \alpha,\beta,\gamma\in[a,b]$ si ha

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\gamma f(x)dx + \int_\gamma^\beta f(x)dx$$

OSS: Preso $f(x)=x^2$, si ha $\int_1^3 f(x)dx = \int_1^{10} f(x)dx + \int_{10}^3 f(x)dx = \int_1^{10} f(x)dx - \int_3^{10} f(x)dx$!

Teorema fondamentale del calcolo e conseguenze

Teorema (Fondamentale del Calcolo - parte 1)

Sia $f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo, f continua $\forall x \in I$.
Fissato $a \in I$, si definisce
$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad \forall t \in I.$$

Allora $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$ $\forall x \in I$.

dim

Osserviamo che, essendo f continua, f è R-integrabile su $[\alpha,\beta]$ $\forall \alpha,\beta \in I$, e dunque $F(x)$ è ben definita $\forall x \in I$!

Debbo provare che $\forall x_0 \in I$ $F'(x_0) = f(x_0)$

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \frac{1}{x-x_0}\left[\int_a^x f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt\right] \underset{\uparrow \text{Teorema di Chasles}}{=}$$

$$= \frac{1}{x-x_0}\left[\cancel{\int_a^{x_0} f(t)\,dt} + \int_{x_0}^x f(t)\,dt - \cancel{\int_a^{x_0} f(t)\,dt}\right]$$

$$= \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x f(t)\,dt \underset{\uparrow \text{Corollario Teorema media integrale}}{=} f(z) \quad \text{dove } z \text{ è compreso tra } x_0 \text{ e } x$$

Quando $x \to x_0$, essendo $|z-x_0| < |x-x_0|$, si ha $z \to x_0$ e dunque

$$\lim_{x\to x_0} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} f(z) = \lim_{z \to x_0} f(z) \underset{\uparrow f \text{ continua in } x_0}{=} f(x_0)$$

e dunque il Teorema, per l'arbitrarietà di $x_0 \in I$, è provato ↯

Osservazione: questo Teorema garantisce che, dato $f: I \to \mathbb{R}$ continua, esiste $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ primitiva di f

però

non ci dice se questa funzione $F(x)$ sia esprimibile in termini di funzioni elementari

Esempio: Data $f(x) = \operatorname{sen} x \cos x$ si ha che

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \operatorname{sen} t \cos t\,dt = \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x$$

Esempio (funzione non esprimibile in termini di f.ni elementari)

Data $f(x) = e^{-x^2}$, la funzione

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

è una primitiva di e^{-x^2}, però NON SO ESPRIMERLA IN TERMINI DI FUNZIONI ELEMENTARI

Teorema (Fondamentale del Calcolo - PARTE II)

Sia $f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo, f continua $\forall x \in I$.

Fissato $a \in I$ definiamo

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad x \in I.$$

Sia $G(x)$ una primitiva di $f(x)$ su I

Allore

(i) $\exists c \in \mathbb{R} : F(x) = G(x) + c \quad \forall x \in I$

(ii) $\forall \alpha, \beta \in I \quad \int_\alpha^\beta f(t)\,dt = G(\beta) - G(\alpha)$

dim

(i) $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$ per il Teorema fond. del Calcolo-parte I; due $\neq$ primitive di $f(x)$ differiscono per una costante, dunque

$$\exists c : F(x) = G(x) + c \quad \forall x \in I$$

(ii) $\forall \alpha, \beta \in I$

$$\int_\alpha^\beta f(t)\,dt \overset{\text{Teorema Chasles}}{=} \int_\alpha^a f(t)\,dt + \int_a^\beta f(t)\,dt \overset{\text{Intervallo orientato}}{=} \int_a^\beta f(t)\,dt - \int_a^\alpha f(t)\,dt$$

$$\overset{\text{definizione di } F(x)}{=} F(\beta) - F(\alpha) \underset{\text{per il punto (i)}}{=} (G(\beta) + \cancel{c}) - (G(\alpha) + \cancel{c})$$

$$= G(\beta) - G(\alpha)$$

Esempio: Calcolare $\displaystyle\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} x\, dx$

dim

$\displaystyle\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x + c \quad c \in \mathbb{R}$ $\qquad G(x) = -\cos x$ una primitiva

dunque

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} x\, dx = \Big[G(x) \Big]_{x=0}^{x=2\pi} = \Big[-\cos x \Big]_{x=0}^{x=2\pi} = -\cos(2\pi) - (-\cos(0)) =$$
$$= -1 - (-1) = 0$$

Esempio: Calcolare $\displaystyle\int_0^4 (2-x)\, dx$

dim

$\displaystyle\int (2-x)\, dx = 2x - \frac{x^2}{2} + c$ $\qquad G(x) = 2x - \dfrac{x^2}{2}$ è una primitiva

dunque

$$\int_0^4 (2-x)\, dx = \left[2x - \frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^{x=4} = \left(2\cdot 4 - \frac{2^2}{2}\right) - \left(2\cdot 0 - \frac{0^2}{2}\right)$$
$$= 8 - 2 = 6$$

Esercizio: Calcolare $F'(1)$, dove $F(x) = \displaystyle\int_1^{e^{3x}} \sqrt{1-t^2}\, dt$

dim

Per risolvere questo esercizio ho due strade

1° strada (complicata)

$$\int \sqrt{1-t^2}\, dt = \frac{1}{2} \arcsen x + \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$\int_1^{e^{3x}} \sqrt{1-t^2}\, dt = \left[\frac{1}{2} \arcsen t + \frac{1}{2} t \sqrt{1-t^2} \right]_{t=1}^{t=e^{3x}}$$

$$= \frac{1}{2} \arcsen e^{3x} + \frac{1}{2} e^{3x} \sqrt{1-e^{6x}} - \frac{\pi}{4} = F(x)$$

e a questo punto calcolare $F'(x) = \sqrt{1-e^{6x}} \cdot e^{3x} \cdot 3$

e dunque $F'(1) = 3\sqrt{1-e^6} \cdot e^3$

2° strada (rapida)

$$x \xmapsto{g} e^{3x} \xmapsto{h} \int_1^{e^{3x}} \sqrt{1-t^2}\, dt = h(g(x)) = F(x)$$

$$F'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x) = \sqrt{1-e^{6x}} \cdot e^{3x} \cdot 3 \qquad F'(1) = 3 \cdot e^3 \sqrt{1-e^6}$$

Esercizio: Calcolare $F'(9)$, dove $F(x) = \int_1^{x^2} t^3 dt$

dim

Si risolve l'esercizio nei due modi prima introdotti

1° calcolando $F(x)$ esplicitamente e quindi derivando e calcolando infine $F'(x)$ in $x=9$

2° osservando che $x \overset{g}{\longmapsto} x^2 \overset{h}{\longmapsto} \int_1^{x^2} t^3 dt = h(g(x))$

dove $g(x) = x^2$ e $h(y) = \int_1^{y} t^3 dt$

e quindi calcolare la derivata della funzione composta

OSSERVAZIONE: negli esercizi precedenti il primo metodo è improponibile per due motivi:

1° obiezione: è uno spreco di fatica logico, in quanto integro e successivamente derivo, ovvero un passo avanti e uno indietro

2° obiezione (FONDAMENTALE): NON sempre è possibile esprimere la funzione integrale $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ in termini di funzioni elementari

Esercizio: Calcolare $F'(x)$ dove $F(x) = \int_{3x}^{\operatorname{sen}(x)} e^{t^2} dt$

dim

$$F(x) = \int_{3x}^{0} e^{t^2} dt + \int_0^{\operatorname{sen}(x)} e^{t^2} dt$$

$$= \int_0^{\operatorname{sen}(x)} e^{t^2} dt - \int_0^{3x} e^{t^2} dt = F_1(x) - F_2(x)$$

Se volessi calcolare in termini di funzioni elementari F_1 ed F_2, dovrei calcolare $\int_0^y e^{t^2} dt$ in termini di funzioni elementari, cosa che NON E' POSSIBILE

Dunque procedo nel secondo modo

$F_1(x) = h(g_1(x)) \qquad x \xmapsto{g_1} \operatorname{sen}(x) \xmapsto{h} \int_0^{\operatorname{sen}(x)} e^{t^2}dt$

$$h(y) = \int_0^y e^{t^2}dt \qquad g_1(z) = \operatorname{sen}(z)$$

$$F_1'(x) = (h \circ g_1)'(x) = h'(g_1(x)) \cdot g_1'(x) = e^{(\operatorname{sen}(x))^2} \cdot \cos(x)$$

$F_2(x) = h(g_2(x)) \qquad x \xmapsto{g_2} 3x \xmapsto{h} \int_0^{3x} e^{t^2}dt$

$$h(y) = \int_0^y e^{t^2}dt \qquad g_2(z) = 3z$$

$$F_2'(x) = (h \circ g_2)'(x) = h'(g_2(x)) \cdot g_2'(x) = e^{(3x)^2} \cdot 3$$

Infine

$$F'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = \cos x \cdot e^{\operatorname{sen}^2 x} - 3e^{9x^2}$$

Esempio Calcolare $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x \, dx$ e $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, dx$

dim

$\int \operatorname{sen}^2 x \, dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{sen} x \cos x + c \quad c \in \mathbb{R}$ e dunque

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x \, dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{sen} x \cos x\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, dx = \int_0^{\pi/2} (1 - \operatorname{sen}^2 x) \, dx = \int_0^{\pi/2} 1 \, dx - \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x \, dx = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

Esercizio: Calcolare $F'(\frac{\pi}{6})$, dove $F(x) = \int_0^{\cos x} \frac{t-1}{t^4+1} dt$

dim

$$x \xmapsto{g} \cos x \xmapsto{h} \int_0^{\cos x} \frac{t-1}{t^4+1} dt$$

$$h(y) = \int_0^y \frac{t-1}{t^4+1} dt \qquad h'(y) = \frac{y-1}{y^4+1}$$

$$g(z) = \cos z \qquad g'(z) = -\operatorname{sen} z$$

$$\Rightarrow F'(x) = (h\circ g)'(x) = h'(g(x))\cdot g'(x)$$

$$= \frac{g(x)-1}{g^4(x)+1}\cdot g'(x) = \frac{\cos x - 1}{\cos^4(x)+1}\cdot(-\cos x)$$

$$F'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cdot\frac{\cos\frac{\pi}{6}-1}{\cos^4\frac{\pi}{6}+1} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}-1}{\frac{9}{16}+1}$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}-2}{\frac{25}{16}} = \sqrt{3}\cdot\frac{4\sqrt{3}-8}{25}$$

Esercizio: Calcolate $\int\sqrt{1-t^2}\,dt$ con il metodo di integrazione per parti

dim

$$\int\sqrt{1-t^2}\,dt = \int \underset{\uparrow u'}{1}\cdot\underset{\uparrow v}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \underset{\uparrow u}{t}\,\underset{\uparrow v}{\sqrt{1-t^2}} - \int \underset{\uparrow u'}{-\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}}\cdot\underset{\uparrow v'}{t}\,dt =$$

$$= t\sqrt{1-t^2} - \int\frac{-t^2+1-1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = t\sqrt{1-t^2} - \int\sqrt{1-t^2}\,dt + \int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$\Downarrow$$

$$2\int\sqrt{1-t^2}\,dt = t\sqrt{1-t^2} + \int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = t\sqrt{1-t^2} + \arcsin t + c$$

$$\Downarrow$$

$$\int\sqrt{1-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\left[t\sqrt{1-t^2} + \arcsin t\right] + c \qquad c\in\mathbb{R}$$

Alcuni complementi sull'integrazione

Teorema (sostituzione integrali definito)

Sia $f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo, f continua $\forall x \in I$

Sia $\varphi: J \to I$, I e J intervalli, φ' continua $\forall t \in J$ e $\varphi'(t) \neq 0$

Allora $\forall a, b \in I$ $\displaystyle\int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)\,dy$

dim

Definiamo $\displaystyle P(x) = \int_{\varphi(a)}^{x} f(y)\,dy \quad x \in I$

$$Q(x) = \int_a^x f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt \quad x \in J$$

Ovviamente $P'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$

$$Q'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \quad \forall x \in J$$

Prendo $\displaystyle R(x) = P(\varphi(x)) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(x)} f(y)\,dy \quad x \in J$ e dunque

$$R'(x) = P'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = Q'(x) \quad x \in J$$

dunque

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(x)} f(y)\,dy = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(x)} P'(y)\,dy = \Big[P(y)\Big]_{y=\varphi(a)}^{y=\varphi(x)} = P(\varphi(x)) - P(\varphi(a)) = R(x) - R(a)$$

$$\int_a^x f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt = \int_a^x Q'(t)\,dt = \int_a^x R'(t)\,dt = \Big[R(t)\Big]_{t=a}^{t=x} = R(x) - R(a)$$

da cui segue

$$\int_a^x f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(x)} f(y)\,dy \quad \forall x \in J$$

da cui segue la Tesi

Esempio: Calcolare $\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt$ (utilizzando il Teorema precedente)

dim

$$\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt \underset{t=\operatorname{sen} x}{=} \int_{\arcsin(0)}^{\arcsin(1)} \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x}\cdot \cos x\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos^2 x\,dx$$

$$= \left[\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{sen} x \cos x\right]_{x=0}^{x=\pi/2} = \frac{\pi}{4}$$

OSSERVAZIONE Applichiamo il metodo di sostituzione due volte

$$\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt \underset{\substack{x=\varphi(t)\\ \frac{dx}{dt}=\varphi'(t)}}{=} \left(\int f(x)\,dx\right)_{x=\varphi(t)}$$

$$= \left(\int f(x)\,dx\right)_{x=\varphi(t)} \underset{\substack{x=\psi(y)\\ \frac{dx}{dy}=\psi'(y)}}{=} \left[\left(\int f(\psi(y))\cdot\psi'(y)\cdot dy\right)_{x=\psi(y)}\right]_{x=\varphi(t)}$$

$$= \left(\int f(\psi(y))\cdot\psi'(y)\,dy\right)_{\psi(y)=\varphi(t)}$$

Dunque abbiamo fatto la trasformazione

$$t \overset{\varphi}{\longmapsto} x \overset{\psi^{-1}}{\longmapsto} y \qquad \text{ovvero} \qquad y = \psi^{-1}(\varphi(t))$$

che si può rappresentare anche come

$$\varphi(t) = \psi(y)$$

ovvero $$\frac{dx}{dt}\,dt = \frac{dx}{dy}\,dy$$