Lo spazio vettoriale delle funzioni R-integrabili

Andiamo a provare (dimostrazioni non richieste all'esame)

che [f, g R-integrabili $\Rightarrow$ $(f+g)$ e kf R-integrabili]

Teorema ($f+g$ è R-integrabile)

Siano $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funzioni R-integrabili

Allora (i) $f+g$ è R-integrabile

(ii) $\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

dim

(i) prese due suddivisioni $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ di $[a,b]$

per definizione di $s(f+g)$

$$s(f,\mathcal{A}) + s(g,\mathcal{B}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{monotonia di } f \text{ rispetto alla suddivisione}}}{\leq} s(f,\mathcal{A}\cup\mathcal{B}) + s(g,\mathcal{A}\cup\mathcal{B}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ovvio}}}{=} s(f+g,\mathcal{A}\cup\mathcal{B}) \leq s(f+g)$$

$$\Downarrow$$

$$\sup\{s(f,\mathcal{A}) + s(g,\mathcal{B}) : \mathcal{B} \text{ sudd.}\} = s(f,\mathcal{A}) + s(g) \leq s(f+g)$$

$$\Downarrow$$

$$\sup\{s(f,\mathcal{A}) + s(g) : \mathcal{A} \text{ sudd.}\} = s(f) + s(g) \leq s(f+g)$$

$$S(f,\mathcal{A}) + S(g,\mathcal{B}) \geq S(f,\mathcal{A}\cup\mathcal{B}) + S(g,\mathcal{A}\cup\mathcal{B}) = S(f+g,\mathcal{A}\cup\mathcal{B}) \geq S(f+g)$$

$$\Downarrow$$

$$\inf\{S(f,\mathcal{A}) + S(g,\mathcal{B}) : \mathcal{A} \text{ suddivisione}\} = S(f) + S(g,\mathcal{B}) \geq S(f+g)$$

$$\Downarrow$$

$$\inf\{S(f) + S(g,\mathcal{B}) : \mathcal{B} \text{ suddivisione}\} = S(f) + S(g) \geq S(f+g)$$

Dunque $S(f) + S(g) \geq S(f+g) \geq s(f+g) \geq s(f) + s(g)$

ma

$S(f) = s(f)$ e $S(g) = s(g)$

$$\Rightarrow S(f+g) = s(f+g) = \int_a^b (f+g)\,dx = \int_a^b f\,dx + \int_a^b g\,dx$$

Teorema (kf è R-Integrabile $\forall k \in \mathbb{R}$)

Sia $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione R-Integrabile, sia $k \in \mathbb{R}$.

Allora (i) kf è R-integrabile

(ii) $\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$

dim

$$s(kf, \mathcal{A}) = k\, s(f, \mathcal{A}) \qquad\qquad s(kf) = k\, s(f)$$
$$\Longrightarrow \qquad\qquad \text{ma } S(f) = s(f)$$
$$S(kf, \mathcal{A}) = k\, S(f, \mathcal{A}) \qquad\qquad S(kf) = k\, S(f)$$

$$\Longrightarrow S(kf) = s(kf) = \int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$$

Teorema del confronto e sue conseguenze

Teorema (del confronto)

Siano $f,g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ due funzioni R-integrabili t.c.

$$f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a,b].$$

Allora $$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

dim.

Presa una $\forall$ suddivisione $\mathcal{A} = \{x_0 < x_1 < \dots < x_m\}$

$$s(f,\mathcal{A}) = \sum_{k=0}^{m-1} (x_{k+1}-x_k) \inf f([x_k,x_{k+1}])$$

$$\wedge\!\!\backslash \leftarrow f \leq g \ \forall x \in [a,b]$$

$$\sum_{k=0}^{m-1} (x_{k+1}-x_k) \inf g([x_k,x_{k+1}]) \leq s(g,\mathcal{A})$$

$$\Downarrow$$

$$s(f) = \sup\{s(f,\mathcal{A}) : \mathcal{A} \text{ suddiv.}\} \leq \sup\{s(g,\mathcal{A}) : \mathcal{A} \text{ suddiv.}\} = s(g)$$

Analogamente

$$S(f,\mathcal{A}) = \sum_{k=0}^{m-1} (x_{k+1}-x_k) \sup f([x_k,x_{k+1}])$$

$$\wedge\!\!\backslash \leftarrow f \leq g \ \forall x \in [a,b]$$

$$\sum_{k=0}^{m-1} (x_{k+1}-x_k) \sup g([x_k,x_{k+1}]) \leq S(g,\mathcal{A})$$

$$\Downarrow$$

$$S(f) = \inf\{S(f,\mathcal{A}) : \mathcal{A} \text{ suddiv.}\} \leq \inf\{S(g,\mathcal{A}) : \mathcal{A} \text{ suddiv.}\} = S(g)$$

Dunque

$$\begin{matrix} s(f) \leq s(g) \\ S(f) \leq S(g) \end{matrix} \quad + \quad \begin{matrix} s(f) = S(f) \\ s(g) = S(g) \end{matrix} \quad \Longrightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \quad \lightning$$

TEOREMA (f R-integrabile $\Rightarrow f^+, f^-, |f|$ R-integrabile)

Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione R-integrabile

Allora

$f^+(x) = \max\{f(x),0\}$ è R-integrabile

$f^-(x) = \max\{-f(x),0\}$ è R-integrabile

$|f|(x) = f^+(x) + f^-(x)$ è R-integrabile e

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f|(x)dx$$

dim

Proviamo che f^+ è R-integrabile

$$\sup f^+([a,b]) = \max\{\sup f([a,b]),0\}$$

$$\inf f^+([a,b]) = \max\{\inf f([a,b]),0\}$$

$$\sup f^-([a,b]) = \max\{-\inf f([a,b]),0\} = -\min\{\inf f([a,b]),0\}$$

$$\inf f^-([a,b]) = \max\{-\sup f([a,b]),0\} = -\min\{\sup f([a,b]),0\}$$

Per ipotesi f è R-integrabile

$\forall\varepsilon>0\ \exists\,\tau_\varepsilon$ suddivisione t.c.

$$S(f,\tau_\varepsilon)-s(f,\tau_\varepsilon) = \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)\left[\sup f([x_k,x_{k+1}]) - \inf f([x_k,x_{k+1}])\right]<\varepsilon$$

Inoltre $\sup f^+([a,b]) - \inf f^+([a,b]) = \max\{\sup f([a,b]),0\} - \max\{\inf f([a,b]),0\} \le$

$\le \sup f([a,b]) - \inf f([a,b])$

(infatti

$$\max\{b,0\}-\max\{a,0\} = \begin{cases} b-a & b\ge a\ge 0\\ b & b\ge 0\ge a\\ 0 & 0\ge b\ge a\end{cases}$$
)

e dunque

$\forall\varepsilon>0\ \exists\,\tau_\varepsilon$ sudd. t.c. $S(f^+,\tau_\varepsilon)-s(f^+,\tau_\varepsilon)\le S(f,\tau_\varepsilon)-s(f,\tau_\varepsilon)<\varepsilon$

Analogamente si prova che f^- è R-integrabile

Allora $|f|(x) = f^+(x)+f^-(x)$ è R-integrabile

Dalla disuguaglianza $\quad -|f|(x) \leq f(x) \leq |f|(x) \quad \forall x \in [a,b]$
per il Teorema del Confronto segue

$$-\int_a^b |f|(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f|(x)\,dx$$

da cui segue, per le proprietà del modulo

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f|(x)\,dx$$

OSSERVAZIONE

f R-integrabile su $[a,b] \Rightarrow f^+$ ed f^- sono R-integrabili su $[a,b]$
$+$
$f^+(x) \geq 0 \quad f^-(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a,b]$

$\Longrightarrow$ (Per il Teorema Confronto) $\quad \int_a^b f^+(x)\,dx \geq 0 = \int_a^b 0\,dx \qquad \int_a^b f^-(x)\,dx \geq 0 = \int_a^b 0.\,dx$

Osservazione: si è provato
f R integrabile su $[a,b] \Rightarrow |f|$ R-integrabile su $[a,b]$
però
$|f|$ R-integrabile su $[a,b] \not\Rightarrow f$ R-integrabile su $[a,b]$

Esempio (f non è R-integr. mentre $|f|$ è R-integrabile)

Si prende $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ -1 & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

La funzione f NON È R-integrabile (utilizzando l'argomento per provare che la funzione di Dirichlet $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$
si dimostra in questo caso $\quad s(f) = -1 < 1 = S(f)$)

La funzione $|f|(x) = 1 \quad \forall x \in [0,1]$ è R-integrabile e

$$\int_0^1 |f|(x)\,dx = 1$$

Teorema (di Chasles, o di spezzamento)

Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ R-integrabile, e sia $c\in\,]a,b[$

Allora (i) f è R-integrabile su $[a,c]$ e su $[c,b]$

(ii) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

dim

Sia $\mathcal{A}$ una qualsiasi suddivisione di $[a,b]$ e si consideri

$\mathcal{A}_c = \mathcal{A}\cup\{c\}$ $\quad \mathcal{A}_c\cap[a,c] = \{x_i\in\mathcal{A}: x_i\in[a,c]\}$

$\mathcal{A}_c\cap[c,b] = \{x_i\in\mathcal{A}\ \ x_i\in[c,b]\}$

$\Downarrow$

$$s(f,\mathcal{A}) \le s(f,\mathcal{A}_c\cap[a,c]) + s(f,\mathcal{A}_c\cap[c,b]) \qquad (*)$$

$$S(f,\mathcal{A}_c\cap[a,c]) + S(f,\mathcal{A}_c\cap[c,b]) \le S(f,\mathcal{A}) \qquad (**)$$

$\Downarrow$

$\forall\varepsilon>0\ \exists\,\mathcal{A}$ suddivisione di $[a,b]$ t.c.

$\mathcal{A}\subseteq\mathcal{A}_c$ $\qquad$ f è integr.

$$S(f,\mathcal{A}_c\cap[a,c]) + S(f,\mathcal{A}_c\cap[c,b]) - s(f,\mathcal{A}_c\cap[a,c]) - s(f,\mathcal{A}_c\cap[c,b]) \le S(f,\mathcal{A}) - s(f,\mathcal{A}) < \varepsilon$$

$\Downarrow$

$\forall\varepsilon>0\ \exists\,\mathcal{A}$ suddivisione di $[a,b]$: $\begin{cases} S(f,\mathcal{A}_c\cap[a,c]) - s(f,\mathcal{A}_c\cap[a,c]) < \varepsilon \\ S(f,\mathcal{A}_c\cap[c,b]) - s(f,\mathcal{A}_c\cap[c,b]) < \varepsilon \end{cases}$

Quindi $\exists \int_a^c f(x)\,dx$ $\int_c^b f(x)\,dx$ e deve aversi per $(*)$ e $(**)$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Si può provare che

Teorema ((continua) $\circ$ (R-integrabile) = (R-integrabile))

Sia $f:[a,b]\to[m,n]$ R-integrabile e sia $\phi:[m,n]\to\mathbb{R}$ continua $\forall x\in[m,n]$.

Allora $\phi\circ f:[a,b]\to\mathbb{R}$ è R-integrabile

Teorema ((R-integrabile) × (R-integrabile) = (R-integrabile))

Siano $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ R-integrabili. Allora $f \cdot g : [a,b] \to \mathbb{R}$ è R-integr.

dim

$f \cdot g(x) = \frac{1}{4}\left[(f+g)^2(x) - (f-g)^2(x)\right]$; $f+g$ e $f-g$ sono R-integrabili;

$(f+g)^2(x) = \phi((f+g)(x))$ dove $\phi(z) = z^2$ è una funzione continua

e dunque $(f+g)^2(x)$ e $(f-g)^2(x)$ sono R-integrabili: ne segue la Tesi

Esercizio: Data $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ che soddisfa

(i) f continua $\forall x \in [a,b]$

(ii) $f(x) \geq 0$ $\forall x \in [a,b]$

(iii) $\int_a^b f(x)\,dx = 0$

provare che $f(x) = 0$ $\forall x \in [a,b]$

dim

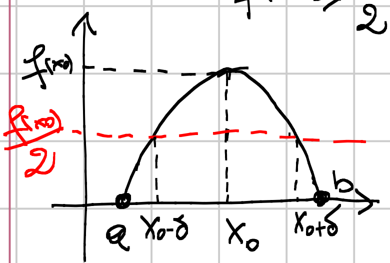
Per assurdo $f(x) \neq 0 \Rightarrow \exists x_0 \in [a,b]$ t.c. $f(x_0) > 0$

Non è restrittivo supporre $x_0 \in]a,b[$

Essendo f continua, per il Teorema Permanenza Segno

$\exists \delta > 0$ t.c.

$$f(x) \geq \frac{f(x_0)}{2} \quad \forall x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[\subset [a,b]$$



Presa la suddivisione

$\mathcal{A} = \{a < x_0-\delta < x_0+\delta < b\}$

si ha

$$s(f,\mathcal{A}) = (x_0-\delta-a) \cdot \inf f[a, x_0-\delta] + (2\delta) \cdot \inf f([x_0-\delta, x_0+\delta]) + (b-x_0-\delta) \inf f([x_0+\delta, b])$$

$$\geq 0 + 2\delta \cdot \frac{f(x_0)}{2} + 0 = \delta \cdot f(x_0) > 0$$

La funzione f è R-integrabile, e dunque

$$\int_a^b f(x)\,dx = s(f) \geq s(f,\mathcal{A}) \geq \delta f(x_0) > 0$$

il che è assurdo!! Ne segue la Tesi

Osservazione: la Tesi provata nell'esercizio precedente non vale più se una delle tre ipotesi non è verificata: costruire controesempi!!

Verso il Teorema Fondamentale del calcolo

Teorema (della media integrale)

Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione R-integrabile, allora

$$\inf f([a,b]) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le \sup f([a,b]).$$

dim

$$\inf f([a,b]) \le f(x) \le \sup f([a,b]) \quad \forall x\in[a,b]$$

+

$\inf f([a,b])$, f, $\sup f([a,b])$ sono R-integrabili

$\Downarrow$ (Teorema del confronto)

$$\int_a^b \inf f([a,b])\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b \sup f([a,b])\,dx$$

$\Downarrow$

$$(b-a)\cdot \inf f([a,b]) \le \int_a^b f(x)\,dx \le (b-a)\sup f([a,b])$$

e dividendo per $(b-a)$ si ottiene la Tesi

Corollario (del Teorema della Media Integrale)

Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ è continua

allora $\exists z\in[a,b]$ t.c. $f(z)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$

dim

f continua $\Rightarrow f$ R-integrabile $\overset{\text{Teorema Media}}{\Rightarrow} \inf f([a,b]) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f\,dx \le \sup f([a,b])$

f continua $\overset{\text{Teorema Weierstrass}}{\Rightarrow}$ $m=\min f([a,b]) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le \max f([a,b])=M$

Ma per il Teorema dei Valori Intermedi

$f([a,b])=[m,M]$ ove $m=\min f([a,b])$ $M=\max f([a,b])$

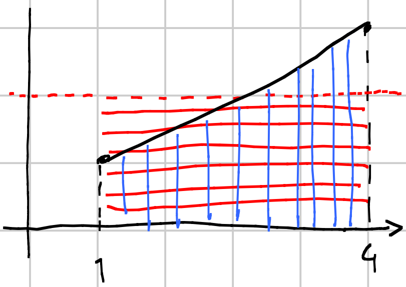
e dunque, essendo $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \in [m,M]$,

$$\exists z\in[a,b] \text{ t.c. } f(z)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

$1+m(x-1)$

$\cancel{1}+m(4)=\cancel{3}2$

Esempio (relativo al Teorema Media)



$$f(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) = \frac{1}{2}(x+1)$$

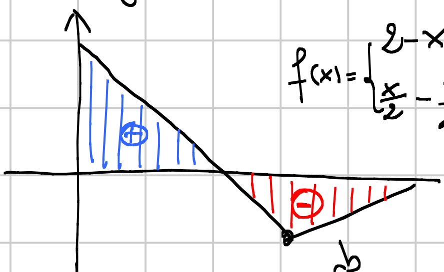
$$\int_1^4 f(x)dx = \int_1^4 \frac{1}{2}(x-1) \overset{\text{graficamente}}{=} 8$$

$$\frac{1}{5-1}\int_1^4 f(x)dx = 2$$

Il numero 2 è l'altezza del rettangolo di base $b-a=4$ che ha la stessa area del sottografico di $f(x)$ nell'intervallo $[1,4]$.

ORIENTARE L'INTERVALLO $[a,b]$

Fino ad ora abbiamo pensato a $\int_a^b f(x)dx$ come una sommatoria (il simbolo "$\int$" è in effetti una S allungata) di aree, positive se sopra l'asse x e negative se collocate sotto l'asse x



$$f(x) = \begin{cases} 2-x & 0 \le x < 3 \\ \frac{x}{2} - \frac{5}{2} & 3 < x \le 5 \end{cases}$$

$$\int_0^5 f(x)dx = \int_0^3 f(x)dx + \int_3^5 f(x)dx = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

In ogni caso, $\int_a^b f(x)dx$ ha senso quando $a \le b$!!

Che senso posso dare a $\int_3^2 f(x)dx$?

Il significato più ragionevole è il seguente

$$\int_3^2 f(x)dx = -\int_2^3 f(x)dx$$

ovvero, in generale, dato $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ R-integrabile

$$\forall \alpha,\beta \in [a,b] \quad \int_\alpha^\beta f(x)dx \underset{\text{def}}{=} \begin{cases} \int_\alpha^\beta f(x)dx & \text{se } \alpha \le \beta \\ -\int_\beta^\alpha f(x)dx & \text{se } \alpha > \beta \end{cases}$$

Oss: che questa sia una "buona" definizione lo si capisce studiando il lavoro fatto da una forza che agisce su una particella che si muove su una retta (la forza diretta lungo la retta)

- $\begin{cases} \text{se la particella si muove nel verso di } F \\ \text{allora la forza compie un lavoro positivo} \end{cases}$

mentre

- $\begin{cases} \text{se la particella si muove nel verso opposto a quello di } F \\ \text{allora la forza compie un lavoro negativo} \end{cases}$

Tutti i teoremi provati in precedenza continuano a valere, con la precauzione seguente

Teorema (del confronto)

$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ R-integrabili, $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [a,b]$

allora $\forall \alpha, \beta \in [a,b]$

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx \begin{cases} \leq \int_\alpha^\beta g(x)\,dx & \text{se } \alpha \leq \beta \\ \geq \int_\alpha^\beta g(x)\,dx & \text{se } \alpha > \beta \end{cases}$$

infatti

se $\alpha > \beta$ allora $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = -\int_\beta^\alpha f(x)\,dx \geq -\int_\beta^\alpha g(x)\,dx = \int_\alpha^\beta g(x)\,dx$

Bisogna modificare leggermente pure

Teorema (f R-integrabile $\Rightarrow$ $|f|$ R-integrabile)

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ R-integrabile $\Longrightarrow$ $|f|$ è R-integrabile e

$$\forall \alpha, \beta \in [a,b] \quad \left| \int_\alpha^\beta f(x)\,dx \right| \leq \left| \int_\alpha^\beta |f|(x)\,dx \right| = \begin{cases} \int_\alpha^\beta |f|(x)\,dx & \text{se } \alpha \leq \beta \\ -\int_\alpha^\beta |f|(x)\,dx & \text{se } \alpha > \beta \end{cases}$$

Oss Tutti i risultati continuano a valere, pur con qualche precauzione per il Teorema del confronto

$f(x) \le g(x) \quad \forall x \in [a,b] \Longrightarrow$

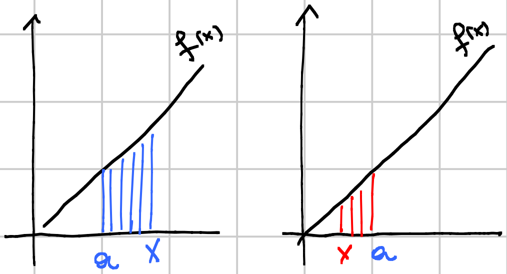
1) $\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$

mentre

2) $\int_b^a f(x)\,dx \ge \int_b^a g(x)\,dx$

f R-integrabile su $[a,b] \Longrightarrow \left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \le \left| \int_a^b |f|\,dx \right|$

Oss: è molto importante dare un senso a $\int_3^0 f(x)dx$ perché si vuole definire $F(x) = \int_a^x f(x)\,dx$



e si vuole che questa sia definita per $x > a$ come pure per $x < a$!!

Teorema (di Chasles - intervalli orientati)

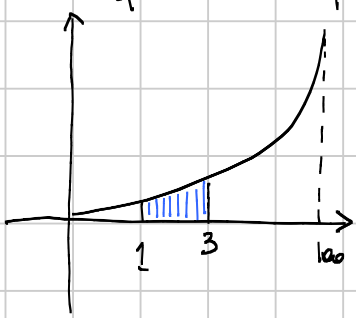
$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ R-integrabile

Allora $\forall \alpha, \beta, \gamma \in [a,b]$ si ha

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_\alpha^\gamma f(x)\,dx + \int_\gamma^\beta f(x)\,dx$$

Oss: questo Teorema dice che, presa per esempio $f(x) = x^2$ che è continua e R-integrabile su $[a,b]$ $\forall a,b \in \mathbb{R}$ e

si ha $$\int_1^3 f(x)\,dx = \int_1^{100} f(x)\,dx + \int_{100}^3 f(x)\,dx \left(= \int_1^{100} f(x)\,dx - \int_3^{100} f(x)\,dx \right)$$



Adesso abbiamo tutti gli strumenti per legare tra loro i concetti di

Primitiva di $f(x)$

e di

Integrale definito di $f(x)$ su $[a,b]$