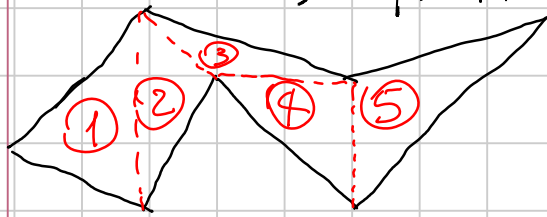


INTEGRALE DEFINITO

Storicamente, il problema dell'agrimensore consisteva nel misurare una figura piana delimitata da segmenti di retta - un appezzamento di terreno - ovvero assegnare un numero a questa area. Per risolvere il problema

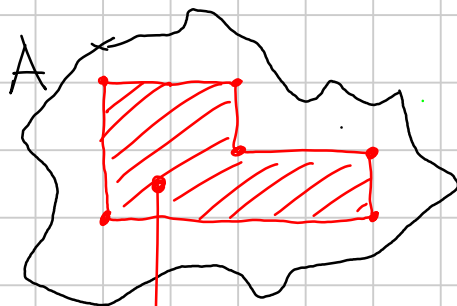


- si suddivide la figura in tanti triangoli
- si calcola (p.e. trigonometrico) l'area dei vari triangoli

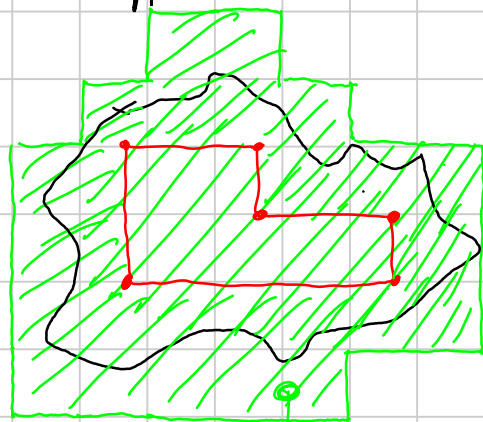


Archimede (il genio per antonomasia) sapeva calcolare l'area del "segmento parabolico", cioè l'area tratteggiata in figura. Come pure sapeva calcolare l'area del cerchio di raggio R : possiamo far risalire a lui l'idea di approssimare l'area (per eccesso e difetto) con l'area di opportuni poligoni regolari,

data una regione, andiamo ad approssimare l'area



6 Quadrati



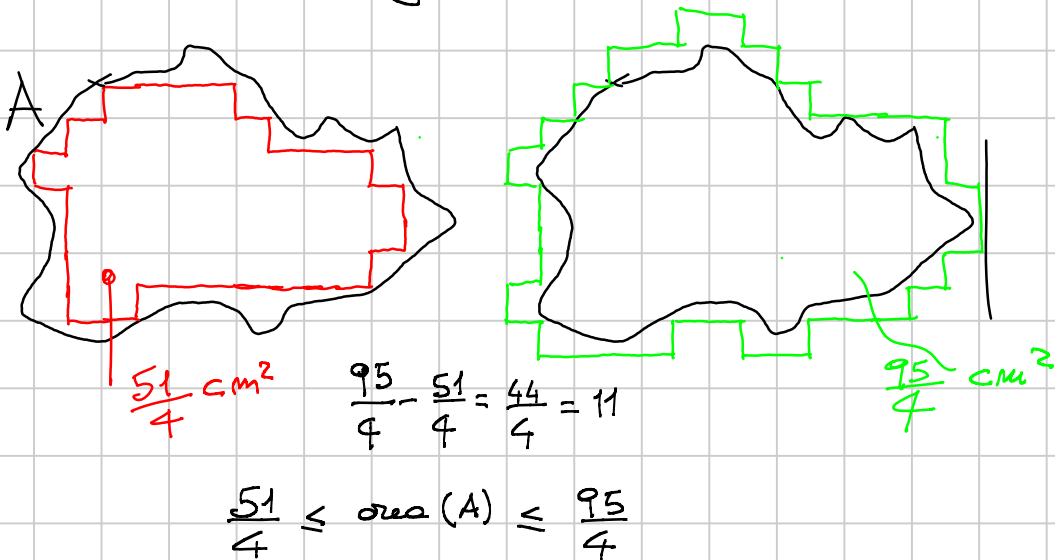
32 quadrati

Approssimando dall'esterno, Trovo 32 quadrati
 " dall'interno, " 6 "

Quindi l'area di A sarà t.c. $6 \leq \text{area } A \leq 32$

L'errore commesso è dato da $32 - 6 = 26 \text{ cm}^2$

Ma se l'unità di misura è + piccola, l'approssimazione non può che migliorare



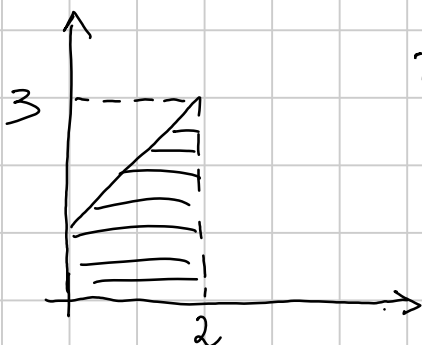
Quindi siamo passati da quadrati di lato 1 cm a quadrati di lato 0,5 cm. L'approssimazione dell'area di A è migliorata in quanto

$$(\text{Area esterna con lato } 1) - (\text{Area interna con lato } 1) = 26 \text{ cm}^2$$

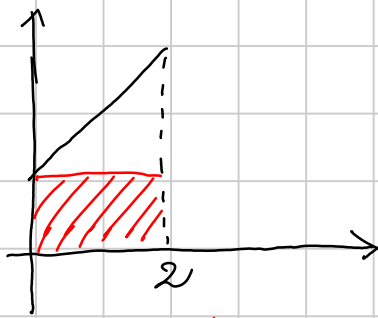
$$(\text{Area esterna con lato } \frac{1}{2}) - (\text{Area interna con lato } \frac{1}{2}) = 11 \text{ cm}^2$$

Più è piccolo il lato del quadratino delle griglie, più aumenta la precisione con cui approssimiamo l'area di A, dove "precisione" = "Area ext - Area int"

Se si vuole approssimare l'area delimitata da $f(x) = x+1$, $x=0$, $y=0$, $y=2$. Questa figura è un Trapezio di area 4 cm^2



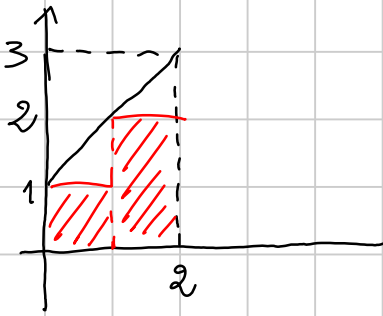
Dimentichiamo questo modo, ovvero non facciamo uso delle nostre conoscenze di geometria elementare. Cerchiamo di approssimare



$$\Delta(f, \{0, 2\}) = 2$$



$$\Sigma(f, \{0, 2\}) = 6$$



$$\Delta(f, \{0, 1, 2\}) = 3$$

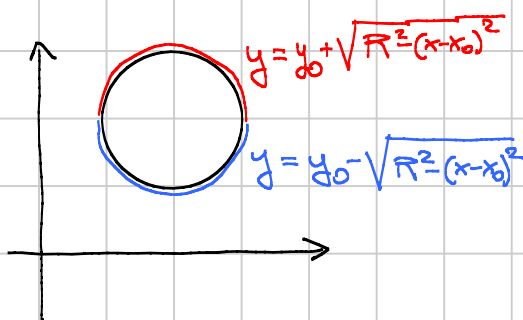


$$\Sigma(f, \{0, 1, 2\}) = 5$$

Quindi

$$2 < 3 < \text{Area} \equiv 4 < 5 < 6$$

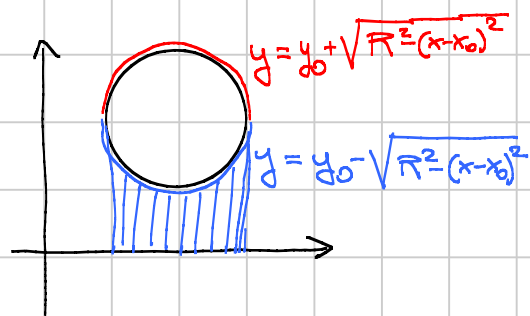
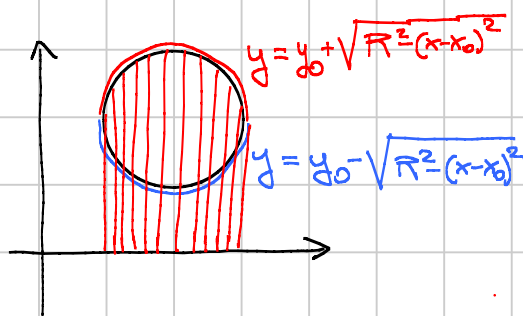
Aggiungendo punti, migliora l'approssimazione ovvero si riduce sempre la differenza tra area esterna e interna



$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$$

$$\Downarrow$$

$$y = y_0 \pm \sqrt{R^2 - (x-x_0)^2}$$



L'area del cerchio si ottiene come differenza tra
(Area tratteggiata in rosso) - (Area tratteggiata in blu)

OSS: Questo procedimento di approssimazione

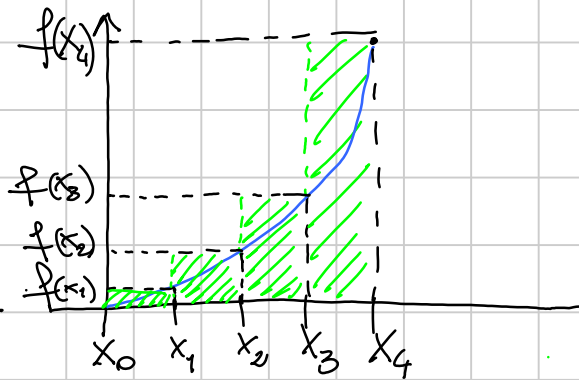
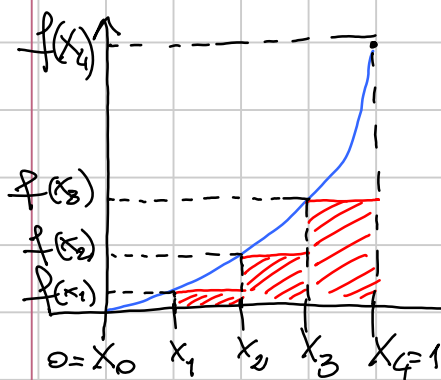
$$(\text{Area Esterna}) - (\text{Area Interna})$$

è un buon procedimento se permette precisione sempre migliore all'aumentare della densità dei quadrati ovvero si vuole che quando (numero quadrati) $\rightarrow \infty$

$$\text{si abbia } (\text{Area Esterna}) - (\text{Area Interna}) \rightarrow 0$$

Area Sottografico Parabola

Vogliamo calcolare l'area di S , dove $S = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1 \quad 0 \leq y \leq x^2\}$



$$f(x_0)(x_1-x_0) + f(x_1)(x_2-x_1) + f(x_2)(x_3-x_2) + f(x_3)(x_4-x_3)$$

$$\sum_{k=0}^3 f(x_k)(x_{k+1}-x_k) \leq \text{Area}(S) \leq \sum_{k=0}^3 f(x_{k+1})(x_{k+1}-x_k)$$

$$f(x_1)(x_1-x_0) + f(x_2)(x_2-x_1) + f(x_3)(x_3-x_2) + f(x_4)(x_4-x_3)$$

In luogo di $A_4 = \{x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4\}$

si consideri $A_m = \{x_k = k \cdot \frac{1}{n} \quad k=0, 1, \dots, m\}$

$$= \{0 < \frac{1}{n} < \dots < \frac{m-1}{n} < 1\}$$

al variare di $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, Possiamo considerare

$$A_1 = \{x_0=0 < 1=x_1\} \quad A_2 = \{x_0=0 < \frac{1}{2} < 1=x_2\}$$

$$A_3 = \{x_0=0 < \frac{1}{3} < \frac{2}{3} < 1=x_3\}$$

$\uparrow$
 x_1

$\uparrow$
 x_2

etc

$$\mathcal{A}_3 = \left\{ 0 < \overset{\uparrow x_0}{\frac{1}{3}} < \overset{\uparrow x_1}{\frac{2}{3}} < \overset{\uparrow x_2}{\frac{3}{3}} < \overset{\uparrow x_3}{1} \right\}$$

$$\Delta(f, \mathcal{A}_3) = \sum_{k=0}^2 (x_{k+1} - x_k) f(x_k) = f(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_1)(x_2 - x_1) + f(x_2)(x_3 - x_2)$$

↑ somma per difetto
relativa a $\mathcal{A}_3$

$$= 0 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{3} + \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{3}$$

$$= \frac{5}{27}$$

$$\mathcal{A}_4 = \left\{ 0 < \overset{\downarrow x_0}{\frac{1}{4}} < \overset{\downarrow x_1}{\frac{1}{2}} < \overset{\downarrow x_2}{\frac{3}{4}} < \overset{\downarrow x_3}{1} \right\}$$

$$\Delta(f, \mathcal{A}_4) = \sum_{k=0}^3 f(x_k)(x_{k+1} - x_k) = f(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_1)(x_2 - x_1) + f(x_2)(x_3 - x_2) + f(x_3)(x_4 - x_3)$$

↑ somma per difetto
relativa a $\mathcal{A}_4$

$$= 0 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{9}{16} \cdot \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{16} + \frac{4}{16} + \frac{9}{16} \right) = \frac{15}{64}$$

$$S(f, \mathcal{A}_4) = \sum_{k=0}^3 f(x_k)(x_{k+1} - x_k) = f(x_1)(x_1 - x_0) + f(x_2)(x_2 - x_1) + f(x_3)(x_3 - x_2) + f(x_4)(x_4 - x_3)$$

↑ somma per eccesso
relativa a $\mathcal{A}_4$

$$= \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{9}{16} \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{16} + \frac{4}{16} + \frac{9}{16} + \frac{16}{16} \right) = \frac{30}{64} = \frac{15}{32}$$

$$S(f, \mathcal{A}_3) = \sum_{k=0}^2 f(x_k)(x_{k+1} - x_k) = f(x_1)(x_1 - x_0) + f(x_2)(x_2 - x_1) + f(x_3)(x_3 - x_2)$$

↑ somma per eccesso
relativa ad $\mathcal{A}_3$

$$= \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{3} + \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{3} + \frac{9}{9} \cdot \frac{1}{3}$$

$$= \frac{14}{27}$$

$$\Delta(f, \mathcal{A}_3) < \Delta(f, \mathcal{A}_4) < \text{area}(A) < S(f, \mathcal{A}_4) < S(f, \mathcal{A}_3)$$

$$\frac{5}{27} < \frac{7}{32} < \text{area}(A) < \frac{15}{32} < \frac{11}{27}$$

ovvero

$$S(f, \mathcal{A}_4) - \Delta(f, \mathcal{A}_4) = \frac{1}{4} < \frac{2}{9} = S(f, \mathcal{A}_3) - \Delta(f, \mathcal{A}_3)$$

Ovvero aumentando il numero di punti della suddivisione
(ovvero passando da $\mathcal{A}_n$ ad $\mathcal{A}_{n+1}$)

la differenza tra le approssimazioni diminuisce

Ricordiamo $\sum_{k=0}^N k^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} = \sum_{k=1}^N k^2$

Prendi $A_m = \left\{ k \cdot \frac{1}{m} : k=0, 1, \dots, m \right\}$ $X_k = \frac{k}{m}$ $f(x_k) = \frac{k^2}{m^2}$ $\forall k=0, \dots, m$
 $X_{k+1} - X_k = \frac{1}{m}$

$$\begin{aligned} S(f, A_m) &= \sum_{k=0}^{m-1} (X_{k+1} - X_k) \cdot f(X_{k+1}) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{m} \cdot \frac{(k+1)^2}{m^2} \\ &= \frac{1}{m^3} \sum_{k=0}^{m-1} (k+1)^2 \stackrel{k+1=j}{=} \frac{1}{m^3} \sum_{j=1}^m j^2 \\ &= \frac{1}{m^3} \cdot \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} = \frac{1}{3} \cdot \left(1 + \frac{1}{m}\right) \left(1 + \frac{1}{2m}\right) \end{aligned}$$

ed è quindi evidente che $\lim_{m \rightarrow +\infty} S(f, A_m) = \frac{1}{3}$
 Analogamente

$$\begin{aligned} \Delta(f, A_m) &= \sum_{k=0}^{m-1} (X_{k+1} - X_k) \cdot f(X_k) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{m} \cdot \frac{k^2}{m^2} \\ &= \frac{1}{m^3} \sum_{k=0}^{m-1} k^2 \\ &= \frac{1}{m^3} \frac{(m-1)m(2m-1)}{6} = \frac{1}{m^3} \frac{(m-1) \cdot m \cdot (2m-1)}{6} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{m}\right) \left(1 - \frac{1}{2m}\right) \end{aligned}$$

e dunque anche stavolta $\lim_{m \rightarrow +\infty} \Delta(f, A_m) = \frac{1}{3}$
 Dovendo essere $\forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$\Delta(f, A_m) \leq \text{area}(S) \leq S(f, A_m)$$

$\downarrow \begin{matrix} m \rightarrow +\infty \\ \frac{1}{3} \end{matrix}$
 $\downarrow \begin{matrix} m \rightarrow +\infty \\ \frac{1}{3} \end{matrix}$

per il Teorema dei 2 Corollari $\text{area}(S) = \frac{1}{3}$ $\checkmark$

Approssimazioni integrali di $f=3-x$ su $[0,4]$

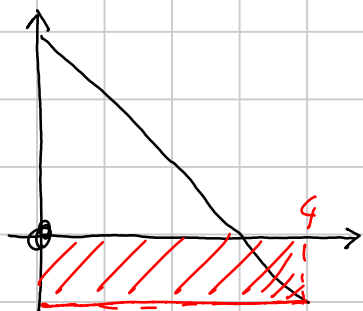
Si consideri $f(x)=3-x$ sull'intervallo $[0,4]$.

Vediamo come si comportano

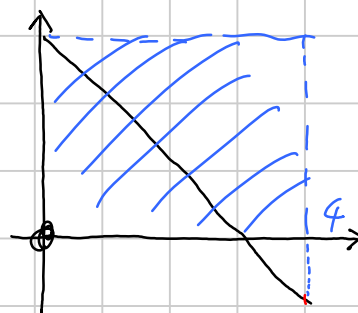
$$\Delta(f, \mathcal{A}_k) \quad S(f, \mathcal{A}_k)$$

quando $\mathcal{A}_k = \left\{ k \cdot \frac{b-a}{n} : k=0, 1, \dots, n \right\} = \left\{ k \cdot \frac{4}{n} : k=0, \dots, n \right\}$
ovvero suddivisioni a "passo costante".

$$\mathcal{A}_1 = \{0, 4\}$$



$$\Delta(f, \mathcal{A}_1) = (4-0) \inf_{x \in [0,4]} f(x) = -4$$

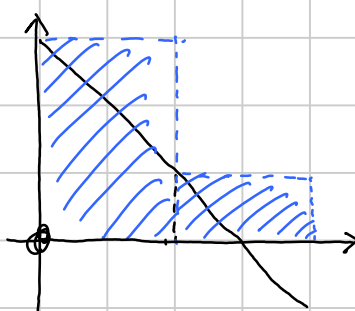


$$S(f, \mathcal{A}_1) = (4-0) \sup_{x \in [0,4]} f(x) = 12$$

$$\mathcal{A}_2 = \{0, 2, 4\}$$



$$\begin{aligned} \Delta(f, \mathcal{A}_2) &= \\ &= (2-0) \inf_{x \in [0,2]} f(x) + (4-2) \inf_{x \in [2,4]} f(x) \\ &= 2 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) = 0 \end{aligned}$$

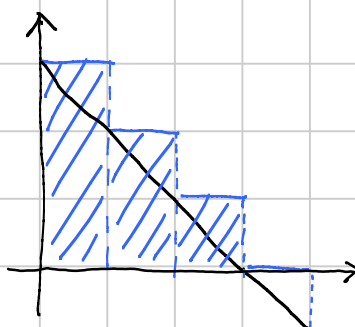


$$\begin{aligned} S(f, \mathcal{A}_2) &= \\ &= (2-0) \sup_{x \in [0,2]} f(x) + (4-2) \sup_{x \in [2,4]} f(x) \\ &= 2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 8 \end{aligned}$$

$$\mathcal{A}_4 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$



$$\begin{aligned} \Delta(f, \mathcal{A}_4) &= \\ &= (1-0) \inf_{x \in [0,1]} f(x) + (2-1) \inf_{x \in [1,2]} f(x) \\ &+ (3-2) \inf_{x \in [2,3]} f(x) + (4-3) \inf_{x \in [3,4]} f(x) = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) = 2 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} S(f, \mathcal{A}_4) &= (1-0) \sup_{x \in [0,1]} f(x) + (2-1) \sup_{x \in [1,2]} f(x) + \dots \\ &= 1 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 6 \end{aligned}$$

e quindi si trova

$$S(f, \mathcal{A}_1) \leq S(f, \mathcal{A}_2) \leq S(f, \mathcal{A}_4) \leq \overbrace{S(f, \mathcal{A}_4)}^{\text{area}(A)} \leq S(f, \mathcal{A}_2) \leq S(f, \mathcal{A}_1)$$

$$-4 \leq 0 \leq 2 \leq \text{area}(A) \leq 6 \leq 8 \leq 12$$

Si può verificare in modo diretto che

$$\begin{aligned} S(f, \mathcal{A}_n) &= \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \cdot \inf_{f([x_k, x_{k+1}])} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{4}{n} \cdot f(x_k) = \frac{4}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(3 - \frac{4k}{n}\right) \\ &= \frac{4}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} 3 - \frac{16}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} k \\ &= \frac{4}{n} \cdot (3n) - \frac{16}{n^2} \frac{(n-1) \cdot n}{2} = 12 - 8 \cdot \frac{n-1}{n} \end{aligned}$$

da cui

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S(f, \mathcal{A}_n) = 12 - 8 = 4$$

Analogamente si prova

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S(f, \mathcal{A}_n) = 4$$

$\Rightarrow 4 \equiv$ Area (con segno)
della funzione
 $f = 3 - x$ su
 $[0, 4]$

FUNZIONI RIEMANN INTEGRABILI

Def (suddivisione)

Dato un intervallo $[a, b]$ chiuso e limitato, un insieme di punti $\mathcal{A} = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}$ viene detto "suddivisione dell'intervallo $[a, b]$ "

Def (somme di Darboux)

Dato una funzione $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, in corrispondenza ad una qualsiasi suddivisione $\mathcal{A} = \{x_0 < \dots < x_n\}$

diciamo "somma di Darboux per difetto"

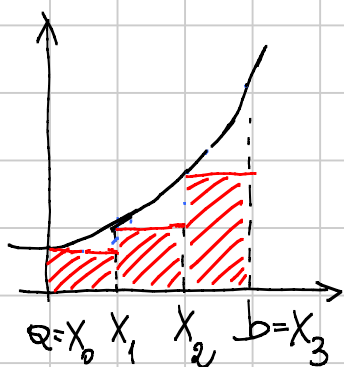
$$\Delta(f, \mathcal{A}) = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \inf f([x_k, x_{k+1}])$$

diciamo "somma di Darboux per eccesso"

$$S(f, \mathcal{A}) = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \sup f([x_k, x_{k+1}])$$

Oss: banalmente $\Delta(f, \mathcal{A}) \leq S(f, \mathcal{A})$

$\forall f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \quad \forall \mathcal{A}$ suddivisione di $[a, b]$



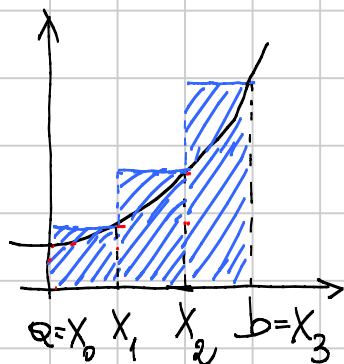
Porro $A = \{(x, y) : a \leq x \leq b \quad 0 \leq y \leq f(x)\}$

la regione individuata da

$y=f(x)$, $x=a$, $x=b$ e $y=0$

Presa $\mathcal{A} = \{x_0 < x_1 < x_2 < x_3\}$

$\Delta(f, \mathcal{A})$ = la regione tratteggiata in rosso
è la approssimazione per
difetto della regione A



$S(f, \mathcal{A})$ = la regione tratteggiata in blu
è la approssimazione per
eccesso della regione A

Si riconduce il calcolo di un'area al sommare le
aree di tanti rettangolini

A questo punto ci definiamo

$$\Delta(f) = \sup \{ \Delta(f, A) : A \text{ suddivisione di } [a, b] \}$$

$$S(f) = \inf \{ S(f, A) : A \text{ suddivisione di } [a, b] \}$$

Oss: per costruzione, se f è limitata allora si ha

$$\Delta(f) \leq S(f) \quad (\text{segue da } \Delta(f, A) \leq S(f, A) \forall A)$$

$\uparrow$ integrale inferiore $\uparrow$ integrale superiore

Def (R-integrabilità - Integrabilità secondo Riemann)

Dato $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitata, questa si dice R-integrabile

o "Integrabile" se

$$\Delta(f) = S(f) = \int_a^b f(x) dx \in \mathbb{R}$$

Il numero $\int_a^b f(x) dx$ viene detto "Integrale definito di f in $[a, b]$ "

Oss: Dato $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitata, si ha

$$\inf f([a, b]) \leq f_m \leq \sup f([a, b])$$

ovvero

$$\{(x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\} \subseteq [a, b] \times [\inf f([a, b]), \sup f([a, b])]$$

Quindi è vero anche

$$- \sup |f|([a, b]) \leq f(x) \leq \sup |f|([a, b])$$

da cui segue

$$\{(x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\} \subseteq [a, b] \times [-\sup |f|([a, b]), \sup |f|([a, b])]$$

Ne ottengo che $S(f) \leq (b-a) \cdot \sup |f|([a, b])$

Tutte le funzioni $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitate sono integrabili secondo Riemann? NO!

Esempio (funzione limitata non R-integrabile)

La funzione $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ non è

integrabile su $[0, 1]$.

Dimo

Così, si prendono $x, y \in [0, 1]$, esiste $q \in]x, y[\cap \mathbb{Q}$

e dunque $\sup f([x, y]) = f(q) = 1$ (segue dalla densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$)

Così, si prendono $x, y \in [0, 1]$, esiste $z \in]x, y[\cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$

e dunque $\inf f([x, y]) = f(z) = 0$

Dunque, per una $\forall$ suddivisione $\mathcal{A} = \{0 = x_0 < \dots < x_n = 1\}$

si avrà

$$\Delta(f, \mathcal{A}) = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \inf f([x_k, x_{k+1}]) = 0$$

$$S(f, \mathcal{A}) = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \sup f([x_k, x_{k+1}]) = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) = x_n - x_0 = 1$$

e dunque $\Delta(f) = 0 < 1 = S(f)$

ovvero la funzione non è R-integrabile $\checkmark$

Monotonia delle somme per eccesso/difetto

Teorema (monotonia di $\alpha(f, A)$ e $S(f, B)$)

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata

Siano A, B suddivisioni di $[a, b]$

$$(i) \quad \alpha(f, A) \leq S(f, A) \quad \text{e} \quad \alpha(f, B) \leq S(f, B)$$

$$(ii) \quad A \subseteq B \Rightarrow \alpha(f, A) \leq \alpha(f, B) \\ S(f, B) \leq S(f, A)$$

$$(iii) \quad \alpha(f, A) \leq S(f, B) \quad \text{e} \quad \alpha(f, B) \leq S(f, A) \\ \text{dim}$$

(i) è ovvio

(ii) Proveremo il risultato nel caso

$$A = \{x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_m\} \subsetneq B = \{x_0 < t < x_1 < x_2 < \dots < x_m\} = A \cup \{t\}$$

$$\begin{aligned} \alpha(f, B) - \alpha(f, A) &= (t - x_0) \cdot \inf f([x_0, t]) + (x_1 - t) \inf f([t, x_1]) + \\ &+ \sum_{k=1}^{m-1} (x_{k+1} - x_k) \inf f([x_k, x_{k+1}]) - (x_1 - x_0) \sup f([x_0, x_1]) - \sum_{k=1}^{m-1} (x_{k+1} - x_k) \inf f([x_k, x_{k+1}]) \\ &= (t - x_0) \cdot \inf f([x_0, t]) + (x_1 - t) \inf f([t, x_1]) - (x_1 - x_0) \inf f([x_0, x_1]) \end{aligned}$$

$$\geq (t - x_0) \inf f([x_0, x_1]) + (x_1 - t) \inf f([x_0, x_1]) - (x_1 - x_0) \inf f([x_0, x_1]) = 0$$

$$\text{e dunque } \alpha(f, B) - \alpha(f, A) \geq 0 \Rightarrow \alpha(f, B) \geq \alpha(f, A)$$

Analogamente

$$\begin{aligned} S(f, A) - S(f, B) &= (x_1 - x_0) \sup f([x_0, x_1]) + \sum_{k=1}^{m-1} (x_{k+1} - x_k) \sup f([x_k, x_{k+1}]) + \\ &- (t - x_0) \sup f([x_0, t]) - (x_1 - t) \sup f([t, x_1]) - \sum_{k=1}^{m-1} (x_{k+1} - x_k) \sup f([x_k, x_{k+1}]) \end{aligned}$$

$$\geq (t - x_0) \sup f([x_0, t]) + (x_1 - t) \sup f([t, x_1]) - (t - x_0) \sup f([x_0, t]) + \\ - (x_1 - t) \sup f([t, x_1]) = 0$$

$$\text{e dunque } S(f, A) - S(f, B) \geq 0 \Rightarrow S(f, A) \geq S(f, B)$$

(iii) Si consideri $\mathcal{C} = A \cup B$.

$$A \subseteq \mathcal{C} \Rightarrow \alpha(f, A) \leq \alpha(f, \mathcal{C}) \quad (\text{per il punto (ii)})$$

$$B \subseteq \mathcal{C} \Rightarrow S(f, \mathcal{C}) \leq S(f, B)$$

$$\text{e dovendo essere } \alpha(f, \mathcal{C}) \leq S(f, \mathcal{C}) \quad (\text{per il punto (i)})$$

$$\text{e dunque } \alpha(f, A) \leq \alpha(f, \mathcal{C}) \leq S(f, \mathcal{C}) \leq S(f, B)$$

$$\text{Analogamente si ottiene } \alpha(f, B) \leq S(f, A)$$



Nel risultato precedente, punto (ii), si è fatto uso del risultato Teorema

$$R \subseteq T \Rightarrow f(R) \subseteq f(T) \Rightarrow \sup f(R) \leq \sup f(T)$$

$$R \subseteq T \Rightarrow f(R) \subseteq f(T) \Rightarrow \inf f(R) \geq \inf f(T)$$

dim.

infatti, essendo $\inf R = \max(M_R)$ e $\sup T = \min(M_T)$

$$R \subseteq T \Rightarrow M_R \supseteq M_T \Rightarrow \min M_R \leq \min M_T \Rightarrow \sup R \leq \sup T$$

$$R \subseteq T \Rightarrow m_R \supseteq m_T \Rightarrow \max(m_R) \geq \max(m_T) \Rightarrow \inf R \geq \inf T$$

osservando che $R \subseteq T \Rightarrow f(R) \subseteq f(T)$ si può agevolmente dedurre la Terza

TEOREMA (Condizione necessaria e sufficiente di integrabilità)

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata. Sono tra loro equivalenti le seguenti affermazioni:

- (i) f è $\mathbb{R}$ -integrabile su $[a, b]$
 - (ii) $\forall \varepsilon > 0 \exists \mathcal{A}_\varepsilon, \mathcal{B}_\varepsilon$ suddivisioni di $[a, b]$ t.c. $S(f, \mathcal{A}_\varepsilon) - s(f, \mathcal{B}_\varepsilon) < \varepsilon$
 - (iii) $\forall \varepsilon > 0 \exists \mathcal{C}_\varepsilon$ suddivisione di $[a, b]$ t.c. $S(f, \mathcal{C}_\varepsilon) - s(f, \mathcal{C}_\varepsilon) < \varepsilon$
- dim

Proviamo che (i) $\Leftrightarrow$ (ii)

$$f \text{ integrabile} \Leftrightarrow \inf \{ S(f, \mathcal{B}) : \mathcal{B} \text{ suddivisione} \} = \int_a^b f dx = \sup \{ S(f, \mathcal{A}) : \mathcal{A} \text{ suddivisione} \}$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \mathcal{B}_\varepsilon : \int_a^b f dx < S(f, \mathcal{B}_\varepsilon) + \varepsilon/2$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \mathcal{A}_\varepsilon : S(f, \mathcal{A}_\varepsilon) - \varepsilon/2 < \int_a^b f dx$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \mathcal{A}_\varepsilon, \mathcal{B}_\varepsilon : \begin{cases} -s(f, \mathcal{B}_\varepsilon) < -\int_a^b f dx + \varepsilon/2 \\ S(f, \mathcal{A}_\varepsilon) < \int_a^b f dx + \varepsilon/2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \mathcal{A}_\varepsilon, \mathcal{B}_\varepsilon : S(f, \mathcal{A}_\varepsilon) - s(f, \mathcal{B}_\varepsilon) < \varepsilon$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) preso $\mathcal{C}_\varepsilon = \mathcal{A}_\varepsilon \cup \mathcal{B}_\varepsilon$ si ha

$$\mathcal{A}_\varepsilon \subseteq \mathcal{C}_\varepsilon \Rightarrow S(f, \mathcal{C}_\varepsilon) \leq S(f, \mathcal{A}_\varepsilon)$$

$$\mathcal{B}_\varepsilon \subseteq \mathcal{C}_\varepsilon \Rightarrow \wedge(f, \mathcal{C}_\varepsilon) \geq \wedge(f, \mathcal{B}_\varepsilon)$$

$$\text{e dunque } \wedge(f, \mathcal{B}_\varepsilon) \leq \wedge(f, \mathcal{C}_\varepsilon) \leq S(f, \mathcal{C}_\varepsilon) \leq S(f, \mathcal{A}_\varepsilon)$$

$$\text{da cui segue } S(f, \mathcal{C}_\varepsilon) - \wedge(f, \mathcal{C}_\varepsilon) \leq S(f, \mathcal{A}_\varepsilon) - \wedge(f, \mathcal{A}_\varepsilon)$$

ovvero la tesi in quanto

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \mathcal{C}_\varepsilon : S(f, \mathcal{C}_\varepsilon) - \wedge(f, \mathcal{C}_\varepsilon) \leq S(f, \mathcal{A}_\varepsilon) - \wedge(f, \mathcal{A}_\varepsilon) < \varepsilon$$

(iii) $\Rightarrow$ (ii) segue banalmente prendendo $\mathcal{A}_\varepsilon = \mathcal{B}_\varepsilon = \mathcal{C}_\varepsilon$ $\checkmark$

Classi di funzioni integrabili

Teorema (Le funzioni monotone sono integrabili!)

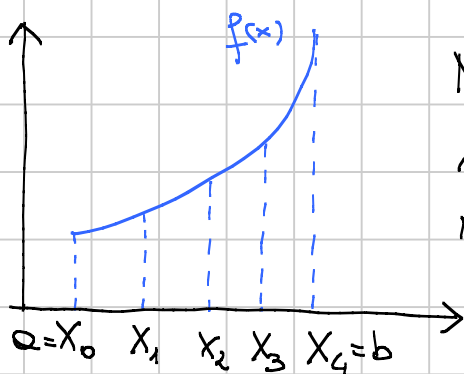
Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata.

Se f è monotona, allora f è $\mathbb{R}$ -integrabile

dim

Non è restrittivo supporre f debolmente crescente
Proveremo la tesi utilizzando la condizione necessario
e sufficiente di integrabilità, provando che

$$\boxed{\text{Teri}} \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \mathcal{C}_\varepsilon \text{ suddivisione} : S(f, \mathcal{C}_\varepsilon) - s(f, \mathcal{C}_\varepsilon) < \varepsilon$$



Nella scelta della suddivisione
siamo liberi, e allora la prendo
regolare ovvero

$$\mathcal{P}_m = \left\{ x_0 + k \cdot \frac{b-a}{m} : k=0, \dots, m \right\}$$

Queste suddivisioni hanno

"passo" costante, ovvero $x_{j+1} - x_j = \frac{b-a}{m} \quad \forall j=0, \dots, m-1$

Inoltre, essendo f debolmente crescente

$$\inf f([x_k, x_{k+1}]) = f(x_k) \quad f(x_{k+1}) = \sup f([x_k, x_{k+1}])$$

$$\begin{aligned} S(f, \mathcal{P}_m) &= \sum_{k=0}^{m-1} (x_{k+1} - x_k) \cdot \sup f([x_k, x_{k+1}]) \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{b-a}{m} \cdot f(x_{k+1}) \\ &= \frac{b-a}{m} \sum_{k=0}^{m-1} f(x_{k+1}) \end{aligned}$$

Analogamente

$$\begin{aligned} s(f, \mathcal{P}_m) &= \sum_{k=0}^{m-1} (x_{k+1} - x_k) \cdot \inf f([x_k, x_{k+1}]) \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{b-a}{m} \cdot f(x_k) \\ &= \frac{b-a}{m} \sum_{k=0}^{m-1} f(x_k) \end{aligned}$$

dunque

$$\begin{aligned} S(f, \mathcal{A}_m) - s(f, \mathcal{A}_m) &= \frac{b-a}{m} \cdot \sum_{k=0}^{m-1} (f(x_{k+1}) - f(x_k)) \\ &= \frac{b-a}{m} \cdot \left((f(x_1) - f(x_0)) + (f(x_2) - f(x_1)) + \dots + (f(x_m) - f(x_{m-1})) \right) \\ &= \frac{b-a}{m} \cdot (f(x_m) - f(x_0)) = \underbrace{(b-a) \cdot [f(b) - f(a)]}_{\text{costante}} \cdot \frac{1}{m} \end{aligned}$$

Quando $m \rightarrow +\infty$ $S(f, \mathcal{A}_m) - s(f, \mathcal{A}_m) \rightarrow 0$, dunque

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{m} : \frac{b-a}{\bar{m}} \cdot (f(b) - f(a)) < \varepsilon$$

e dunque

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \mathcal{A}_{\bar{m}} \text{ suddivisione} : S(f, \mathcal{A}_m) - s(f, \mathcal{A}_m) < \varepsilon \quad \checkmark$$

OSSERVAZIONE

Presa $\mathcal{A} = \{x_0=a < x_1 < \dots < x_m=b\}$ suddivisione di $[a,b]$, in generale

$$|x_{j+1} - x_j| \neq |x_{k+1} - x_k| \quad \text{se } j \neq k$$

Le suddivisioni da noi utilizzate per provare l'integrabilità delle funzioni monotone sono speciali in tal senso!

Def (uniforme continuità) (concetto globale)

data $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, questa si dice "uniformemente continua su A "

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x, y \in A \quad |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

dove $\delta = \delta(\varepsilon)$

Teorema (Heine Cantor) (provato necessariamente)

Se $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua $\forall x \in [a,b]$ chiuso e limitato allora f è uniformemente continua su $[a,b]$

Teorema (le funzioni continue sono R-integrabili)

Sia $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua sull'intervallo chiuso e limitato $[a,b]$.

Allora (i) f è limitata su $[a,b]$

(ii) f è uniformemente continua su $[a,b]$

(iii) f è R-integrabile

dimo.

(i) segue dal Teorema di Weierstrass

(ii) segue dal Teorema di Heine-Cantor e quindi

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x, y \in [a,b] \quad |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$$

(iii) Proviamo che

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \mathcal{C}_\varepsilon \text{ suddivisione di } [a,b] : S(f, \mathcal{C}_\varepsilon) - \alpha(f, \mathcal{C}_\varepsilon) < \varepsilon$$

Per la uniformità continua di f

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$$

Fissato ε , sia $\mathcal{C}_\varepsilon = \{x_0 < x_1 < \dots < x_m\}$ T.c.

$$|x_{j+1} - x_j| < \delta \quad \forall j = 0, \dots, m$$

$$S(f, \mathcal{C}_\varepsilon) - \alpha(f, \mathcal{C}_\varepsilon) = \sum_{k=0}^{m-1} (x_{k+1} - x_k) \left[\sup f([x_k, x_{k+1}]) - \inf f([x_k, x_{k+1}]) \right]$$

Weierstrass

$$\Downarrow \sum_{k=0}^{m-1} (x_{k+1} - x_k) \left[\max f([x_k, x_{k+1}]) - \min f([x_k, x_{k+1}]) \right]$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} (x_{k+1} - x_k) \left[f(M_k) - f(m_k) \right] \leftarrow M_k, m_k \in [x_k, x_{k+1}]$$

$$< \sum_{k=0}^{m-1} (x_{k+1} - x_k) \cdot \varepsilon \leftarrow |M_k - m_k| \leq |x_{k+1} - x_k| < \delta \Rightarrow |f(M_k) - f(m_k)| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow S(f, \mathcal{C}_\varepsilon) - \alpha(f, \mathcal{C}_\varepsilon) < \varepsilon \cdot (b-a)$$

dunque

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \mathcal{C}_\varepsilon \text{ suddivisione} : S(f, \mathcal{C}_\varepsilon) - \alpha(f, \mathcal{C}_\varepsilon) < \varepsilon(b-a)$$

e questo prova la nostra tesi



Esercizio provare che $\text{area}(\{(x,y) : 0 \leq x \leq 1 \quad 0 \leq y \leq x^k\}) = \frac{1}{k+1}$
 $\forall k \geq 0$ (vedere il caso $k=2$ g'è fatto!!)