Trasformazioni Razionalizzanti $\left(t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)$

È una trasformazione che trasforma una funzione razionale in $\operatorname{sen}(x)$ e $\cos(x)$ in una funzione razionale in t

L'idea è la seguente

$$\begin{cases} \operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right) = \dfrac{2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)} \\ \cos x = \cos\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right) = \dfrac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)} \end{cases}$$

e dividendo per $\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$ si ottiene

$$\begin{cases} \operatorname{sen}(x) = \dfrac{2 \operatorname{Tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \operatorname{Tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)} \\ \cos x = \dfrac{1 - \operatorname{Tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \operatorname{Tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)} \end{cases}$$

Ne segue che sostituendo $t = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$ (ovvero $x = 2 \operatorname{arctg} t$) si passa da una funzione razionale in $\operatorname{sen} x, \cos x$ a una funzione razionale in t

Si osservi che

$$\frac{dt(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\operatorname{Tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \operatorname{Tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(2 \operatorname{arctg} t\right) = \frac{2}{1 + t^2}$$

Esercizio Calcolare tutte le primitive di $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}$

dim.

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}\,dx = \left(\int \frac{2t}{1+t^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt\right)_{t=\operatorname{Tg}\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$\operatorname{Tg}\frac{x}{2} = t$

$x = 2\operatorname{arctg} t$

$\frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2}$

$$= \left(\int \frac{2t}{1+t^2}\,dt\right)_{t=\operatorname{Tg}\frac{x}{2}} = \left(\log(1+t^2) + c\right)_{t=\operatorname{Tg}\frac{x}{2}}$$

$$= \log\left(1+\operatorname{Tg}^2\frac{x}{2}\right) + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$= -2\log\left(\cos\frac{x}{2}\right) + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

verifica $\left(-2\log\left(\cos\frac{x}{2}\right)\right)' = -\cancel{2}\,\frac{1}{\cos\frac{x}{2}} \cdot -\frac{1}{\cancel{2}}\operatorname{sen}\frac{x}{2} = \operatorname{Tg}\frac{x}{2}$ verificato?

$$\frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x} = \frac{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{1+\cos^2\frac{x}{2}-\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}} = \frac{\cancel{2}\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cancel{\cos\frac{x}{2}}}{\cancel{2}\cos^{\cancel{2}}\frac{x}{2}} = \operatorname{Tg}\frac{x}{2}$$

✓

Trasformazioni Razionalizzanti $(t=\sqrt{x})$

Esercizio: Calcolare tutte le primitive di $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}(x+1)}$

dim

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} \underset{\substack{\uparrow t=\sqrt{x} \\ x=t^2 \\ \frac{dx}{dt}=2t}}{=} \left(\int \frac{1}{\cancel{t}(t^2+1)}\cdot 2\cancel{t}\cdot dt\right)_{t=\sqrt{x}} = \left(2\arctan t + c\right)_{t=\sqrt{x}}$$

$$= 2\arctan\sqrt{x} + c \quad c\in\mathbb{R}$$

$$= \left(\int \frac{1}{\cancel{t}(t^2+1)}\cdot 2\cancel{t}\, dt\right)_{t=\sqrt{x}} = 2\arctan\sqrt{x}+c \quad c\in\mathbb{R}$$

Funzioni Iperboliche

Le funzioni iperboliche si definiscono a partire dalla funzione esponenziale e^x

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$ seno iperbolico

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$ coseno iperbolico

al variare di $x \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{Tgh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$ Tangente iperbolica

Si verifica immediato

$$\operatorname{senh}(-x) = -\operatorname{senh}(x) \quad \text{dispari}$$

$$\cosh(-x) = \cosh(x) \quad \text{pari}$$

$$\operatorname{Tgh}(-x) = -\operatorname{Tgh}(x) \quad \text{dispari}$$

Come pure

$$\lim_{x \to -\infty} \operatorname{senh} x = -\infty \qquad \operatorname{senh}(0) = 0 \qquad +\infty = \lim_{x \to +\infty} \operatorname{senh} x$$

$$\lim_{x \to -\infty} \cosh x = +\infty \qquad \cosh(0) = 1 \qquad +\infty = \lim_{x \to +\infty} \cosh x$$

$$\lim_{x \to -\infty} \operatorname{Tgh} x = -1 \qquad 1 = \lim_{x \to +\infty} \operatorname{Tgh}(x)$$

Esercizio: Provare che

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{senh} x) = \cosh x$$

$$\frac{d}{dx}(\cosh x) = \operatorname{senh} x$$

al variare di $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{Tgh} x) = \frac{1}{\cosh^2} = 1 - \operatorname{Tgh}^2 x$$

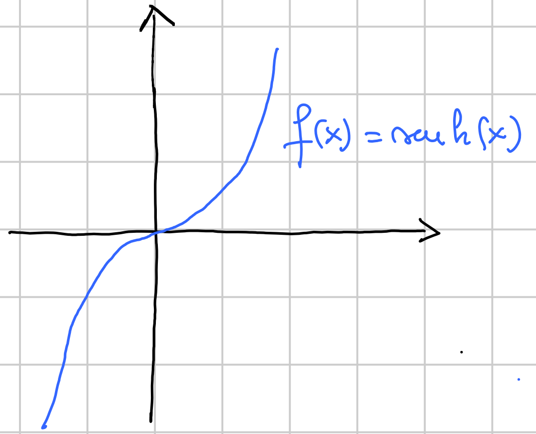
$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$$

Studio senh x

$\operatorname{senh}(0)=0$, $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{senh} x = +\infty$, dispari, $(\operatorname{senh} x)' = \cosh x$

e quindi $(\operatorname{senh} x)' > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

$(\operatorname{senh} x)'' = (\cosh x)' = \operatorname{senh} x \begin{cases} >0 & x>0 \\ <0 & x<0 \end{cases}$

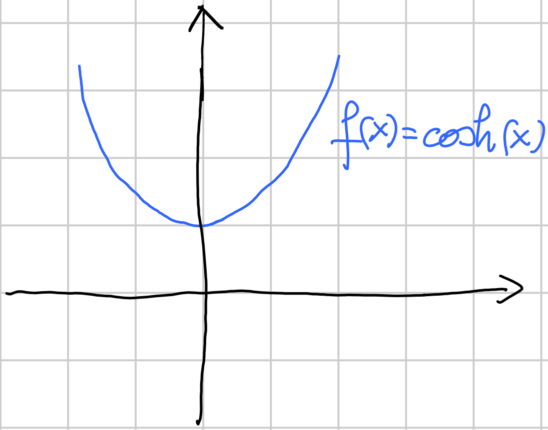


Studio cosh x

$\lim_{x\to\pm\infty} \cosh x = +\infty$, $\cosh(0)=1$

$(\cosh x)' = \operatorname{senh} x \begin{cases} >0 & x>0 \\ <0 & x<0 \end{cases}$, $(\cosh x)'' = \cosh x > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

ed è una funzione pari



La funzione settsh x

La funzione $f(x) = \operatorname{senh} x$ è continua, strettamente crescente

$\Rightarrow \exists$ la funzione inversa $f^{-1}(x) = \operatorname{settsh} x$ continua e strettamente crescente

Andiamo a ricavarne l'espressione esplicita

$$y = \operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \underline{\text{sse}} \quad e^x - e^{-x} - 2y = 0$$

$$\underline{\text{sse}} \quad e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0$$

$$\underline{\text{sse}} \quad e^x = y \pm \sqrt{y^2+1} \qquad \text{ma } e^x > 0 \ \forall x$$

$$\underline{\text{sse}} \quad x = \log\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$$

settorsenoiperbolico

Dunque $\quad f^{-1}(x) = \operatorname{settsh} x = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

Esercizio: Calcolare tutte le primitive di $f(x) = \sqrt{1+x^2}$

dim

$$\int \sqrt{x^2+1}\,dx \underset{\substack{x = \operatorname{senh} t \\ \frac{dx}{dt} = \cosh t}}{=} \left(\int \cosh t \cdot \cosh t \, dt\right)_{x = \operatorname{senh} t} =$$

$$= \left(-\frac{t}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{senh} t \cosh t + c\right)_{x = \operatorname{senh} t} = -\frac{1}{2}\log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} + c$$

$c \in \mathbb{R}$

$$\int \cosh^2 t \, dt = \int \underset{u}{\cosh t}\ \underset{v'}{\cosh t}\, dt = \underset{u}{\cosh t}\ \underset{v}{\operatorname{senh} t} - \int \underset{u'}{\operatorname{senh} t}\ \underset{v}{\operatorname{senh} t}\, dt$$

$$= \cosh t \operatorname{senh} t - \int \left(1 + \cosh^2 t\right) dt$$

$$\int \cosh^2 t \, dt = \frac{1}{2}\left(-t + \cosh t \operatorname{senh} t\right) + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

Verifica

$$\left[-\frac{1}{2}\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+\frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2}\right]' = -\frac{1}{2}\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)+\frac{1}{2}\sqrt{1+x^2}$$

$$+\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\sqrt{1+x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\right)=\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\left(1+1+x^2+x^2\right)$$

$$=\sqrt{1+x^2}$$