Primitive

Def (Primitive di f)

Sia data $f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo. Una funzione $F: I \to \mathbb{R}$ si dice "primitiva di f" se $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in I$

Esempi

$f(x) = x^n \longrightarrow F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ è una primitiva

$f(x) = \operatorname{sen} x \longrightarrow F(x) = -\cos x$ " " "

$f(x) = \cos x \longrightarrow F(x) = \operatorname{sen} x$ " " "

$f(x) = 1/x \longrightarrow F(x) = \log|x|$ " " "

$f(x) = e^x \longrightarrow F(x) = e^x$ " " "

Oss

$$\frac{d}{dx}\log|x| = \begin{cases} \dfrac{d}{dx}\log x = \dfrac{1}{x} & x > 0 \\ \dfrac{d}{dx}\log(-x) = \dfrac{1}{-x}\cdot(-1) = \dfrac{1}{x} & x < 0 \end{cases}$$

Oss (la primitiva non è unica)

Data una funzione f, la derivata f' è unica

" " " f, se F è una primitiva di f allora $F(x)+1$ è una primitiva di f

Dunque se F è una primitiva di f allora sono individuate ∞ primitive

$$F(x) + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

Problema: data f, sia F una primitiva. Allora

$$F(x) + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

sono tutte le primitive di f?

Teorema (due primitive di f differiscono per una costante)

Date F e G due primitive di f, esiste una costante $c \in \mathbb{R}$ t.c. $F(x) = G(x) + c \quad \forall x \in I$

dim

Considero $H(x) : I \to \mathbb{R}$

$H'(x) = [F'(x) - G'(x)] = f(x) - f(x) = 0 \quad \forall x \in I \quad I$ intervallo

$\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} : H(x) = c \quad \forall x \in I \Rightarrow F(x) = G(x) + c \quad \forall x \in I$

$\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}$ t.c. $F(x) - G(x) = c \quad \forall x \in I$

Ha senso quindi considerare la totalità delle primitive di f

Def (Integrale indefinito)

Data $f : I \to \mathbb{R}$ I intervallo, diciamo "integrale indefinito di f" e lo indico con $\int f dx$

$$\int f dx = \{ F(x) + c \;:\; F \text{ è una primitiva di } f,\ c \in \mathbb{R} \}$$

Esempi

$$\int x \, dx = \frac{x^2}{2} + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$\int e^x dx = e^x + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

etc

Oss: $\dfrac{d}{dx}\left(\int f(x) dx \right) = f(x)$

$$\int \left(\frac{df}{dx} \right) dx = f(x) + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

Risulterà utile il seguente risultato
(dimostrazione immediata

Date $f, g : I \to \mathbb{R}$
" F primitiva di f
" G " " g
Se $f(x) = g(x) \ \forall x \in I$ allora $\exists c \in \mathbb{R} : F(x) = G(x) + c$
$\forall x \in I$

dim

$H(x) = F(x) - G(x)$ $\quad H'(x) = (F' - G')(x) = f(x) - g(x) = 0 \ \forall x \in I$

$$\Rightarrow \exists c : H(x) = c \quad \forall x \in I$$

$$\Rightarrow F(x) = G(x) + c \quad \forall x \in I$$

Corollario
Se $f = g \ \forall x \in I$ allora $\int f dx = \int g dx$

Esempio (una funzione senza primitive)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$ non ha primitiva

dim

Supponiamo $\exists$ $F(x)$ primitiva allora

$F'(x) = 0 \quad \forall x \neq 0 \Rightarrow F(x) = \begin{cases} c_1 & x < 0 \\ c_2 & x > 0 \end{cases}$ su ogni intervallo

Ma F è derivabile su $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ F continua su $\mathbb{R}$ $\Rightarrow \lim_{x \to 0^-} F = \lim_{x \to 0^+} F$

$\Rightarrow F(x) = c_1 = c_2 = F(0) \Rightarrow F(x)$ è una costante su $\mathbb{R}$

$\Rightarrow F'(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(0) = 0 \neq 1 = f(0)$

che è impossibile. Il problema è la discontinuità di f $\lightning$

Una volta calcolate le primitive delle funzioni elementari, è necessario forgiare le regole per calcolare primitive delle somme, prodotti etc di funzioni elementari

Oss: calcolare la derivata di una funzione è una operazione meccanica che, se possibile, non presenta difficoltà

viceversa il calcolo esplicito della primitiva (ovvero la sua espressione in termini di funzioni elementari) non è sempre possibile

L'esistenza di una primitiva di una funzione continua è garantita dal Teorema fondamentale del calcolo integrale (che proveremo più avanti)

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x) \rightsquigarrow \int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \rightsquigarrow$$ INTEGRAZIONE PER PARTI

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) \rightsquigarrow$$ " PER SOSTITUZIONE

INTEGRAZIONE PER DECOMPOSIZIONE IN SOMMA

$$\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

ESEMPIO : Calcolare $\int \frac{dx}{x(x+1)}$

dim

$$\int \frac{dx}{x(x+1)} = \int \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right] dx = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x+1} =$$

$$= \log|x| - \log|x+1| + c =$$

$$= \log\left|\frac{x}{x+1}\right| + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

verifica

$$\left(\log\left|\frac{x}{x+1}\right| + c\right)' = \left|\frac{x+1}{x}\right| \cdot \frac{\frac{x}{x+1}}{\left|\frac{x}{x+1}\right|} \cdot \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{\cancel{(x+1)^2}}{|x|^2} \cdot \frac{x}{(x+1)} \cdot \frac{1}{\cancel{(x+1)^2}} =$$

$$= \frac{1}{x(x+1)}$$

Esempio Calcolare $\int (e^x + x)\,dx$

dim

$$\int (e^x + x)\,dx = \int e^x\,dx + \int x\,dx = e^x + \frac{x^2}{2} + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

Verifica

$$\left(e^x + \frac{x^2}{2} + c\right)' = e^x + x$$

Integrazione per parti

Formula Leibniz

$$(fg)'(x) = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x) \quad \forall x \in I$$

$$\Downarrow$$

$$f'(x)\,g(x) = (fg)'(x) - f(x)\,g'(x) \quad \forall x \in I$$

$$\Downarrow$$

Se due funzioni sono =, coincidono gli integrali indefiniti

$$\int f'(x)\,g(x)\,dx = \int (fg)'(x)\,dx - \int f(x)\,g'(x)\,dx$$

$$\Downarrow$$

$$\int f'(x)\,g(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f(x)\,g'(x)\,dx$$

Teorema (Integrazione per parti)

Date $f,g: I \to \mathbb{R}$, g derivabile $\forall x \in I$, $F(x)$ primitiva di f allora

$$\int f(x)\,g(x)\,dx = F(x)\,g(x) - \int F(x)\,g'(x)\,dx$$

dim

è una verifica $\quad \dfrac{d}{dx}\left(\int f(x)\,g(x)\,dx\right) = f(x)\,g(x)$

$$\frac{d}{dx}\left(F(x)\,g(x) - \int F(x)\,g'(x)\,dx\right) = f(x)\,g(x) + \cancel{F(x)\,g'(x)} - \cancel{F(x)\,g'(x)}$$

ed è così verificato ✓

Esempio Calcolare $\int x e^x\,dx$

dim

Ho due possibilità nell'applicare l'integrazione per parti

$$\int \underset{u'}{x}\,\underset{v}{e^x}\,dx = \underset{u}{\frac{x^2}{2}}\,\underset{v}{e^x} - \int \underset{u}{\frac{x^2}{2}}\,\underset{v'}{e^x}\,dx$$

e mi ritrovo a dover calcolare un integrale più complesso

Se invece procedo scambiando i ruoli di x ed e^x

$$\int \underset{u}{x}\,\underset{v'}{e^x}\,dx = \underset{u}{x}\,\underset{v}{e^x} - \int \underset{u'}{1}\cdot \underset{v}{e^x}\,dx = xe^x - e^x + c \qquad c\in\mathbb{R}$$

Esempio Calcolare $\int x^2 e^x\,dx$

dim

$$\int \underset{u}{x^2}\,\underset{v'}{e^x}\,dx = \underset{u}{x^2}\,\underset{v}{e^x} - \int \underset{u'}{2x}\,\underset{v}{e^x}\,dx$$

$$= x^2 e^x - 2\int x e^x\,dx \;\dots$$

$$= x^2 e^x - 2\left(xe^x - e^x\right) + c \qquad c\in\mathbb{R}$$

Esempio: Calcolare $\int \operatorname{sen}^2 x\,dx$

dim

$$\int \underset{u'}{\operatorname{sen} x}\,\underset{v}{\operatorname{sen} x} = \underset{u}{(-\cos x)}\cdot \underset{v}{\operatorname{sen} x} - \int \underset{u}{(-\cos x)}\,\underset{v'}{(\cos x)}\,dx$$

$$= -\operatorname{sen} x \cos x + \int \left(1 - \operatorname{sen}^2 x\right) dx$$

$$= -\operatorname{sen} x \cos x + \int 1\cdot dx - \int \operatorname{sen}^2 x\,dx$$

dunque

$$\int \operatorname{sen}^2 x\,dx = -\operatorname{sen} x \cos x + x - \int \operatorname{sen}^2 x\,dx$$

Ne segue

$$2\int \operatorname{sen}^2 x\,dx = x - \operatorname{sen} x \cos x + c \qquad c\in\mathbb{R}$$

$$\int \operatorname{sen}^2 x\,dx = \frac{1}{2}\left(x - \operatorname{sen} x \cos x\right) + c \qquad c\in\mathbb{R}$$

OSS: scrivere $c/2$ o c non cambia nulla, in questo c è arbitraria.

Esempio Calcolare $\int \cos^2 x \, dx$

$$\int \cos^2 x \, dx = \int (1-\operatorname{sen}^2 x) \, dx = x - \int \operatorname{sen}^2 x \, dx$$ (per l'esempio precedente)

$$= x - \frac{1}{2}(x - \operatorname{sen} x \cos x) + c = \frac{1}{2}(x + \operatorname{sen} x \cos x) + c \quad c \in \mathbb{R}$$

Esercizio Calcolare $\int \sqrt{1-x^2} \, dx$

Ricordiamo che $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{1-x^2}\right) \overset{\text{dim}}{=} \frac{1}{\cancel{2}_1}(1-x^2)^{-1/2} \cdot (-\cancel{2}^1 x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\int \sqrt{1-x^2} \, dx = \int \underset{u'}{1} \cdot \underset{v}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \underset{u}{x} \cdot \underset{v}{\sqrt{1-x^2}} - \int \underset{u}{x} \cdot \underset{v'}{\left(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)} dx$$

$$= x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2 - 1 + 1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$$

$$= x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2} \, dx + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\Downarrow$$

$$2\int \sqrt{1-x^2} \, dx = x\sqrt{1-x^2} + \operatorname{arcsen} x + c \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\int \sqrt{1-x^2} \, dx = \frac{1}{2}\operatorname{arcsen} x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + c \quad c \in \mathbb{R}$$

Esempio Calcolare $\int \log x \, dx$

$$\int \log x \, dx = \int \underset{u'}{1} \cdot \underset{v}{\log x} \, dx = \underset{u}{x} \, \underset{v}{\log x} - \int \underset{u}{x} \cdot \underset{v'}{\frac{1}{x}} \, dx$$

$$= x \log x - \int 1 \cdot dx$$

$$= x \log x - x + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

Esempio Calcolare $\int \operatorname{arctg} x \, dx$

$$\int \operatorname{arctg} x \, dx = \int \underset{u'}{1} \cdot \underset{v}{\operatorname{arctg} x} \, dx = \underset{u}{x} \, \underset{v}{\operatorname{arctg} x} - \int \underset{u}{x} \cdot \underset{v'}{\frac{1}{1+x^2}} \, dx$$

$$= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} \, dx$$

$$= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \log(1+x^2) + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

Integrazione per sostituzione

La derivata della funzione composta

$$\frac{d}{dx}(g\circ f)(x) = g'(f(x))\cdot f'(x)$$

$$\Downarrow$$

$$\int \frac{d}{dx}(g\circ f)(x)\,dx = \int g'(f(x))\cdot f'(x)\,dx$$

$$\Downarrow$$

$$\int g'(f(x))\,f'(x)\,dx = (g\circ f)(x)\,dx$$

Teorema (Integrazione per sostituzione)

Sia $\varphi : I \to J$ derivabile

Sia $g : J \to \mathbb{R}$ e sia $G : J \to \mathbb{R}$ una primitiva

Allora $\int (g\circ\varphi)(x)\cdot\varphi'(x)\,dx = (G\circ\varphi)(x) + c \quad c\in\mathbb{R}$

dim

È una verifica

$$\frac{d}{dx}\int (g\circ\varphi)(x)\,\varphi'(x)\,dx = (g\circ\varphi)(x)\cdot\varphi'(x) \quad \forall x\in I$$

$$\frac{d}{dx}(G\circ\varphi)\,dx = (G'\circ\varphi)(x)\cdot\varphi'(x) \quad \forall x\in I$$

$$= (g\circ\varphi)(x)\cdot\varphi'(x) \quad \forall x\in I$$

Posto che F sia una primitiva di f, il metodo di sostituzione dice che

$$\left(\int f(y)\,dy\right)_{y=\varphi(x)} = \int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\,dx = (F\circ\varphi)(x)+c, \quad c\in\mathbb{R}$$

Dunque dall'integrale indefinito

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + c \quad c\in\mathbb{R}$$

si ottiene

$$\left(\int \frac{1}{y}\,dy\right)_{y=\varphi(x)} = \int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\,dx = \log|\varphi(x)| + c \quad c\in\mathbb{R}$$

Quindi possiamo scrivere

$$\boxed{\begin{array}{c} \displaystyle\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad c\in\mathbb{R} \qquad n\neq -1 \\ \Downarrow \\ \displaystyle\left(\int y^n\,dy\right)_{y=\varphi(x)} = \int (\varphi(x))^n\cdot\varphi'(x)\,dx = \frac{(\varphi(x))^{n+1}}{n+1} + c \quad c\in\mathbb{R} \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \displaystyle\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + c, \quad c\in\mathbb{R} \\ \Downarrow \\ \displaystyle\left(\int \cos y\,dy\right)_{y=\varphi(x)} = \int \cos(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\,dx = \operatorname{sen}(\varphi(x)) + c \quad c\in\mathbb{R} \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \displaystyle\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + c, \quad c\in\mathbb{R} \\ \Downarrow \\ \displaystyle\left(\int \operatorname{sen} y\,dy\right)_{y=\varphi(x)} = \int \operatorname{sen}(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\,dx = -\cos(\varphi(x)) + c \quad c\in\mathbb{R} \end{array}}$$

$$\int e^x\,dx = e^x + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\left(\int e^y\,dy\right)_{y=\varphi(x)} = \int e^{\varphi(x)} \cdot \varphi'(x) \cdot dx = e^{\varphi(x)} + c \qquad c \in \mathbb{R}}$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\left(\int \frac{dy}{1+y^2}\right)_{y=\varphi(x)} = \int \frac{\varphi'(x)\,dx}{1+\varphi^2(x)} = \operatorname{arctg}(\varphi(x)) + c \qquad c \in \mathbb{R}}$$

$$\int \left(1+\operatorname{Tg}^2(x)\right) dx = \operatorname{Tg}(x) + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\left(\int \left(1+\operatorname{Tg}^2(y)\right) dy\right)_{y=\varphi(x)} = \int \left(1+\operatorname{Tg}^2(\varphi(x))\right) \varphi'(x)\,dx = \operatorname{Tg}(\varphi(x)) + c \qquad c \in \mathbb{R}}$$

OSSERVAZIONE
$$\frac{d}{dx}|x| = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ \nexists & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

dunque $\frac{d}{dx}|x| = (\text{segno di } x) = \frac{x}{|x|}$

Esempio: Calcolare l'integrale indefinito di $Tg(x)$

dim

$$\int Tg\,x\,dx = \int \frac{sen\,x}{cos\,x}\,dx = -\int \frac{-sen\,x}{cos\,x}\,dx =$$

$$= -\int \frac{\frac{d}{dx}(cos\,x)}{cos\,x}\,dx \underset{y=cos\,x}{=} \left[-\int \frac{dy}{y}\right]_{y=cos\,x}$$

$y = cos\,x$

$\frac{dy}{dx} = -sen\,x$

$$= -\log|cos\,x| + c = \log\frac{1}{|cos\,x|} + c$$

Verifica

$$\left(-\log|cos\,x|\right)' = -\frac{1}{|cos\,x|}\frac{cos\,x}{|cos\,x|}\cdot -sen\,x = \frac{sen\,x}{cos\,x} \quad \checkmark$$

Esempio Calcolare $\int cos(x^3)\cdot x^2 dx$

dim

$$\int cos(x^3)\cdot x^2 dx \underset{y=x^3}{=} \left(\int cos(y)\cdot\frac{1}{3}\frac{dy}{dx}\,dx\right)_{y=x^3}$$

$\frac{dy}{dx} = 3x^2$ ovvero $x^2 = \frac{1}{3}\frac{dy}{dx}$

$$= \left(\frac{1}{3}\int cos\,y\,dy\right)_{y=x^3} = \left(-\frac{sen\,y}{3}+c\right)_{y=x^3} \quad c\in\mathbb{R}, \text{ da cui}$$

$$\int cos(x^3)\cdot x^2\cdot dx = -\frac{1}{3}sen(x^3) + c \quad c\in\mathbb{R} \quad \checkmark$$

Esercizio: Calcolare $\int \frac{1}{x\log x}dx$

dim

$$\int \frac{1/x}{\log x}\,dx \underset{y=\log x}{=} \left(\int \frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}\,dx\right)_{y=\log x} = \left(\int\frac{dy}{y}\right)_{y=\log x} =$$

$y = \log x$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$

$$= \log|\log x| + c \quad c\in\mathbb{R} \quad \checkmark$$

Esempio calcolare $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$

Per far sparire la radice, conviene porre $x = \operatorname{sen} t$

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx \underset{x=\operatorname{sen} t}{=} \left(\int \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t} \cdot \frac{dx}{dt}\, dt \right)_{x=\operatorname{sen} t} =$$

$\frac{dx}{dt} = \cos t$

$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ in modo che $\operatorname{sen} x$ sia crescente e quindi invertibile

$$= \left(\int |\cos(t)| \cdot \cos(t) \cdot dt \right)_{x=\operatorname{sen} t} =$$

$\cos x > 0$ quando $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$$= \left(\int \cos^2(t)\, dt \right)_{x=\operatorname{sen} t} =$$

la primitiva di $\cos^2 t$ era stata calcolata in precedenza

$$= \left(\frac{t}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sen} t \cos t + c \right)_{x=\operatorname{sen} t} \quad c \in \mathbb{R}$$

$t = \operatorname{arcsen} x$

$$= \frac{\operatorname{arcsen} x}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x) \sqrt{1-\operatorname{sen}^2(\operatorname{arcsen} x)} + c$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{arcsen} x + \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + c \quad c \in \mathbb{R}$$

N.B. la funzione e^{-x^2} ha primitive che non sono esprimibili in termini di funzioni elementari

(si veda la mia pagina internet "Alcune note di Analisi 1")

Primitive di funzioni razionali (cenni)

Una funzione $f(x)$ si dice "razionale" se
$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$ dove P e Q sono due polinomi

Premettiamo che: qualunque sia la funzione razionale $f(x)=P(x)/Q(x)$ esiste $F(x)$ primitiva di $f(x)$ ed esiste il modo di calcolarla esplicitamente

Limiteremo l'attenzione al caso grado$[Q(x)] \leq 2$

$\boxed{1^\circ \text{ caso}}$ $Q(x) = x - a$ con $a \in \mathbb{R}$

Esercizio: Calcolare tutte le primitive di
$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 1}{x - 2}$$

divido

$$\begin{array}{rrr|l}
x^3 & -3x^2 & +1 & x-2 \\ \hline
x^3 & -2x^2 & & x^2-x-2 \\ \hline
// & -x^2 & +1 & \\
 & -x^2 & +2x & \\ \hline
 & // & -2x+1 & \\
 & & -2x+4 & \\ \hline
 & & // \; -3 &
\end{array}$$

e dunque

$$x^3 - 3x^2 + 1 = (x^2 - x - 2)(x-2) - 3$$

da cui segue che

$$\frac{x^3 - 3x^2 + 1}{x-2} = x^2 - x - 2 - \frac{3}{x-2}$$

Ne segue che
$$\int \frac{x^3 - 3x^2 + 1}{x-2}\,dx = \int (x^2 - x - 2)\,dx - 3\int \frac{dx}{x-2}$$
$$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x - 3\log|x-2| + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

$\boxed{2^\circ \text{ CASO}}$ $\quad Q(x) = x^2 + ax + b \qquad a, b \in \mathbb{R}$

Abbiamo 3 casi, a seconda delle radici di $Q(x) = 0$

Esercizio (Radici reali e coincidenti)

Calcolare tutte le primitive di $\dfrac{x^3 - x + 1}{x^2 - 4x + 4} = f(x)$

dim

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & & -x & +1 & x^2 - 4x + 4 \\
x^3 & -4x^2 & +4x & & \hline x + 4 \\
\hline
// & 4x^2 & -5x & +1 & \\
 & 4x^2 & -16x & +16 & \\
\hline
 & // & 11x & -15 &
\end{array}
$$

dunque si ottiene

$$x^3 - x + 1 = (x^2 - 4x + 4)(x + 4) + 11x - 15$$

$$\int \frac{x^3 - x + 1}{x + 4}\,dx = \int (x + 4)\,dx + \int \frac{11x - 15}{x^2 - 4x + 4}\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + 4x + \int \frac{11x - 15}{x^2 - 4x + 4}\,dx$$

$$\frac{11x - 15}{(x-2)^2} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x-2)^2} = \frac{Ax - 2A + B}{(x-2)^2}$$

dunque per determinare A e B devo risolvere

$$\begin{cases} A = 11 \\ B - 2A = -15 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = 11 \\ B = 7 \end{cases}$$

da cui segue che

$$\int \frac{x^3 - x + 1}{x + 4}\,dx = \frac{x^2}{2} + 4x + \int \frac{11}{x - 2}\,dx + \int \frac{7}{(x-2)^2}\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + 4x + 11 \log|x - 2| - \frac{7}{3} \frac{1}{(x-2)} + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

Esercizio (radici complesse e coniugate)

Calcolare tutte le primitive di $f(x) = \dfrac{x^3-2x^2+x}{x^2+2x+3}$

dim

$$
\begin{array}{l|l}
x^3-2x^2+x & x^2+2x+3 \\ \cline{2-2}
x^3+2x^2+3x & x-4 \\ \hline
// \ -4x^2-2x & \\
\quad -4x^2-8x & \\ \cline{1-1}
\quad // \ \ 6x &
\end{array}
$$

da cui si ottiene

$$x^3-2x^2+x = (x^2+2x+3)(x-4)+6x$$

$$\int \frac{x^3-2x^2+x}{x^2+2x+3}\,dx = \int (x-4)\,dx + \int \frac{6x}{x^2+2x+3}\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2} - 4x + \int \frac{6x+6-6}{x^2+2x+3}\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2} - 4x + 3\int \frac{2x+2}{x^2+2x+3}\,dx - 6\int \frac{dx}{x^2+2x+3}$$

$$= \frac{x^2}{2} - 4x + 3\log|x^2+2x+3| - 6\int \frac{dx}{(x^2+2x+1)+2}$$

$$= \frac{x^2}{2} - 4x + 3\log|x^2+2x+3| - 3\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$= \frac{x^2}{2} - 4x + 3\log|x^2+2x+3| - 3\sqrt{2}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2}\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2} - 4x + 3\log|x^2+2x+3| - 3\sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + c \quad c\in\mathbb{R}$$

Esercizio (radici reali e distinte)

Calcolare tutte le primitive di $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+4x+1}$

dim

$$\int \frac{x^2}{x^2+4x+1}\,dx = \int \frac{x^2+4x+1}{x^2+4x+1}\,dx - \int \frac{4x+1+7-7}{x^2+4x+1}$$

$$= x - 2\int \frac{2x+4}{x^2+4x+1}\,dx + 7\int \frac{dx}{(x^2+4x+4)-3}$$

$$= x - 2\log|x^2+4x+1| + 7\int \frac{dx}{[(x+2)-\sqrt{3}][x+2+\sqrt{3}]}$$

$$\frac{1}{(x+2-\sqrt{3})(x+2+\sqrt{3})} = \frac{A}{x+2-\sqrt{3}} + \frac{B}{x+2+\sqrt{3}} = \frac{(A+B)x + 2(A+B) + \sqrt{3}(A-B)}{(x+2+\sqrt{3})(x+2-\sqrt{3})}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 2(A+B)+\sqrt{3}(A-B) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-B \\ A-B = 1/\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = -\frac{1}{2\sqrt{3}} \\ A = \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$\int f(x)\,dx = x - 2\log|x^2+4x+1| + \frac{7}{2\sqrt{3}}\int \frac{dx}{x+2-\sqrt{3}} - \frac{7}{2\sqrt{3}}\int \frac{dx}{x+2+\sqrt{3}}$$

$$= x - 2\log|x^2+4x+1| + \frac{7}{2\sqrt{3}}\log|x+2-\sqrt{3}| - \frac{7}{2\sqrt{3}}\log|x+2+\sqrt{3}| + c$$

$c \in \mathbb{R}$