Convessità

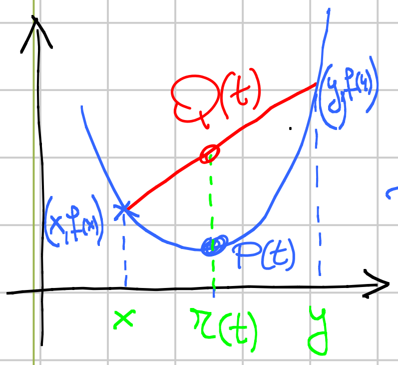
Def (funzione convessa)

Sia $f: I \to \mathbb{R}$, dove I è un intervallo. La funzione f si dice "convessa su I" se $\forall x, y \in I$ con $x<y$

$$(*) \quad f((1-t)x+ty) \leq (1-t)f(x) + t f(y) \quad \forall t \in]0,1[$$

La funzione si dice "strettamente convessa su I" se la disuguaglianza $(*)$ è stretta.

La funzione f si dice "(strettamente) concava su I" se $-f$ è (strettamente) convessa su I.



$r(t) = (1-t)x + ty \quad t \in]0,1[$

$r(t)$ è l'ascissa del punto

$P(t) = [(1-t)x+ty \,;\, f((1-t)x+ty)]$

questo punto si muove sul grafico di f

$r(t)$ è anche l'ascissa del punto

$Q(t) = [(1-t)x+ty \,;\, (1-t)f(x) + t f(y)]$

questo punto si muove sul segmento $(x, f(x)) \longmapsto (y, f(y))$

Dunque "convessità" $\iff$ "$Q(t)$ sta sopra $P(t)$" $\forall t \in]0,1[$

$\iff$ ordinata$(Q(t)) \geq$ ordinata$(P(t))$ $\forall t \in]0,1[$

Oss: ascissa$(Q(t))$ = ascissa$(P(t)) = r(t) \quad t \in]0,1[$

Esempio $f(x) = |x|$ è convessa su $\mathbb{R}$

dim

Fisso $x, y \in \mathbb{R}$ $x<y$

$$|(1-t)x + ty| \leq (1-t)|x| + t|y| \quad \forall t \in]0,1[$$

disuguaglianza Triangolare
+ modulo prodotto = prodotto moduli

Esempio $f(x) = x^2$ è convessa su $\mathbb{R}$

dim

Fissati $x, y \in \mathbb{R}$ $x<y$ debbo provare

$$[(1-t)x + ty]^2 \leq (1-t)x^2 + ty^2 \quad \forall t \in]0,1[$$

ovvero

$$(1-t)^2x^2 + t^2y^2 + 2t(1-t)xy \leq (1-t)x^2 + t\,y^2 \quad \forall t \in]0,1[$$

ovvero

$$(1-t)\cdot x^2[1-1+t] + ty^2[1-t] - 2t(1-t)xy \geq 0 \quad \forall t \in]0,1[$$

ovvero

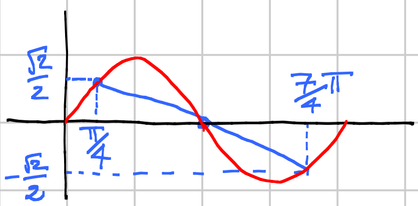
$$t(1-t)\,(x^2+y^2-2xy) = t\,(1-t)\,(x-y)^2 \geq 0 \quad \forall t \in]0,1[$$

e quest'ultima disuguaglianza è vera

Esempio (senx su $[0,2\pi]$ non è convessa né concava)

La funzione $f(x) = \operatorname{sen} x$ non è convessa né concava sull'intervallo $[0,2\pi]$

dim



$x = \frac{\pi}{4}$ $y = \frac{7}{4}\pi$

$$z(t) = (1-t)\frac{\pi}{4} + t\cdot\frac{7}{4}\pi$$

$$\frac{\pi}{2} = z(t) = (1-t)\frac{\pi}{4} + t\cdot\frac{7}{4}\pi$$

$$2 = (1-t) + 7t$$

$$1 = 6t \quad \boxed{t = 1/6}$$

$$\frac{\pi}{2} = z(1/6) = \frac{5}{6}\cdot\frac{\pi}{4} + \frac{1}{6}\cdot\frac{7}{4}\pi$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f(z(1/6)) = 1 > \frac{5}{6}f\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{6}f\left(\frac{7}{4}\pi\right) = \frac{5}{6}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{6}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{3}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

quindi $\exists t = 1/6$ per cui non vale disug. convessità

$\frac{3}{2}\pi = \gamma(t)$ $\quad \frac{3}{2}\cancel{\pi} = (1-t)\frac{\cancel{\pi}}{4} + t\frac{7\cancel{\pi}}{4}$ $\quad 6 = 1-t+7t$ $\quad t = 5/6$

$$f\left(\tfrac{3}{2}\pi\right) = f\left(\gamma\left(\tfrac{5}{6}\right)\right) = -1 < \left(1-\tfrac{5}{6}\right) f\left(\tfrac{\pi}{4}\right) + \tfrac{5}{6} f\left(\tfrac{7}{4}\pi\right) = \tfrac{1}{6}\tfrac{\sqrt{2}}{2} - \tfrac{5}{6}\tfrac{\sqrt{2}}{2} = -\tfrac{2}{3}\tfrac{\sqrt{2}}{2} = -\tfrac{\sqrt{2}}{3}$$

quindi $\exists\, t = 5/6$ per cui non vale disug. concavità $\not\!\!\!\swarrow$

Oss: $f(x) = \operatorname{sen} x$ è concava su $[0,\pi]$

" " convessa su $[\pi, 2\pi]$

Teorema (def equivalenti di convessità)

Sia $f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo. Sono tra loro equivalenti, $\forall x,y \in I$ $x<y$

1) $f((1-t)x + ty) \le (1-t) f(x) + t f(y) \quad \forall t \in]0,1[$

2) $f(\omega) \le \dfrac{y-\omega}{y-x} f(x) + \dfrac{\omega - x}{y-x} f(y) \qquad \forall \omega \in]x,y[$

ovvero

$$f(\omega) \le f(x) + \frac{f(y)-f(x)}{y-x}\cdot(\omega - x) \qquad \forall \omega \in]x,y[$$

Oss. fond. $\dfrac{y-\omega}{y-x} + \dfrac{\omega-x}{y-x} = 1 \Rightarrow \omega = \dfrac{y-\omega}{y-x}\cdot x + \dfrac{\omega - x}{y-x} y \quad \forall \omega \in]x,y[$

1) $\Rightarrow$ 2)

$$f(\omega) = f\left(\frac{y-\omega}{y-x}x + \frac{\omega-x}{y-x}\cdot y\right) \overset{\text{per la 1)}}{\le} \frac{y-\omega}{y-x} f(x) + \frac{\omega - x}{y-x}\cdot f(y)$$

$$\le \frac{(y-\omega) f(x) + (\omega - x) f(y) \; - x f(x) + x f(x)}{y-x}$$

$$= \frac{f(x)(y-x) + \omega(f(y)-f(x)) - x(f(y)-f(x))}{y-x}$$

$$= f(x) + \frac{f(y)-f(x)}{y-x}\cdot(\omega - x) \qquad \forall \omega \in]x,y[$$

2) $\Rightarrow$ 1)

$$f((1-t)x+ty) \overset{\omega=(1-t)x+ty}{=} f(\omega) \underset{\text{uso la 2)}}{\le} f(x) + \frac{f(y)-f(x)}{y-x}\left((1-t)x + ty - x\right)$$

$$f((1-t)x+ty) \le f(x) + t(f(y)-f(x)) = (1-t) f(x) + t f(y) \quad \forall t \in]0,1[$$

$\not\!\!\!\swarrow$

TEOREMA (f convessa se $R_{x_0}(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ è crescente)

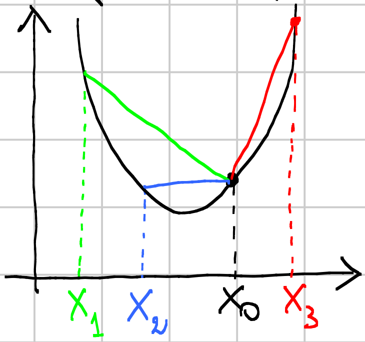
$f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo. Sono tra loro equivalenti

1) f è (strettamente) convessa su I
2) $R_{x_0}(x)$ è (strettamente) crescente $\forall x_0 \in I$

$$R_{x_0}(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

dim.

Graficamente il Teorema è ben osservabile



Proviamo che 1) $\Rightarrow$ 2)

Presi $x < y$ dobbiamo provare

$$\frac{R_{x_0}(y) - R_{x_0}(x)}{y-x} \geq 0$$

ovvero

$$\frac{f(y)-f(x_0)}{(y-x_0)(y-x)} - \frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)(y-x)} = \frac{(x-x_0)(f(y)-f(x_0)) - (f(x)-f(x_0))(y-x_0)}{(y-x_0)(x-x_0)(y-x)}$$

$$= \frac{f(x_0)(y-x_0-x+x_0) + f(y)(x-x_0) - f(x)(y-x_0)}{(y-x_0)(x-x_0)(y-x)}$$

$$= \frac{f(x_0) + f(y)\frac{x-x_0}{y-x} - f(x)\frac{y-x_0}{y-x}}{(y-x_0)(x-x_0)} = \frac{f(x_0) + f(y)\frac{x-x_0}{y-x} + f(x)\frac{x_0-y}{y-x}}{(y-x_0)(x-x_0)}$$

Supponiamo che $x < x_0 < y$: allora

$$\frac{R_{x_0}(y) - R_{x_0}(x)}{y-x} = \frac{f(x_0) - f(y)\frac{x_0-x}{y-x} - f(x)\frac{y-x_0}{y-x}}{(y-x_0)(x-x_0)} \geq 0$$

sfrutto l'equival. tra 1) e 2) nella osservazione precedente essendo f convessa

in quanto (Numeratore ≤ 0) e (Denominatore < 0)

Analogamente, se supponiamo che $x < y < x_0$

$$\frac{R_{x_0}(y) - R_{x_0}(x)}{y-x} = \frac{f(x_0)(y-\cancel{x_0}-x+\cancel{x_0}) + f(y)(x-x_0) - f(x)(y-x_0)}{(y-x_0)(x-x_0)(y-x)}$$

$$= \frac{f(y) - f(x_0)\frac{x-y}{x-x_0} - f(x)\frac{y-x_0}{x-x_0}}{(y-x_0)(y-x)} \geq 0$$

Anche qui sfrutto l'equivalenza tra 1) e 2) nella oss. precedente essendo f una funzione convessa

in quanto (Numeratore ≤ 0) e (Denominatore < 0)

Infine se $x_0 < x < y$

$$\frac{R_{x_0}(y) - R_{x_0}(x)}{y-x} = \frac{f(x_0)(y-x) + f(y)(x-x_0) - f(x)(y-x_0)}{(y-x_0)(x-x_0)(y-x)}$$

$$= \frac{-f(x) + f(y)\frac{x-x_0}{y-x_0} + f(x_0)\frac{y-x}{y-x_0}}{(x-x_0)(y-x)} \geq 0$$

f è convessa e per l'eq. tra 1) e 2) nella def precedente ho la tesi

(Numeratore ≥ 0)
(Denominatore < 0)

La proposizione opposta 2) $\Rightarrow$ 1) segue ripercorrendo a ritroso la dimostrazione 1) $\Rightarrow$ 2).

Teorema (f: $I \to \mathbb{R}$ convessa allora f continua su $\mathring{I}$)

Sia $f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo, f convessa su I

Allora f continua su $\mathring{I}$

dim

Per il Teorema precedente

f convessa su I <u>sse</u> $R_{x_0}(x) = \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ debolmente crescente su $I \setminus \{x_0\}$, $\forall x_0 \in I$

Essendo $R_{x_0}(x)$ debolmente crescente, esistono $\forall x_0 \in \mathring{I}$

$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} R_{x_0}(x)$ e $\lim_{x \to x_0^+} R_{x_0}(x) = f'_+(x_0)$

Ma
$$\lim_{x \to x_0^-} (f(x)-f(x_0)) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \lim_{x \to x_0^-} (x-x_0) = f'_-(x_0) \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{x \to x_0^+} (f(x)-f(x_0)) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \lim_{x \to x_0^+} (x-x_0) = f'_+(x_0) \cdot 0 = 0$$

e dunque $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} f(x_0)$, ovvero la continuità di $f(x)$ in x_0. Per l'arbitrarietà di $x_0 \in \mathring{I}$, ho la tesi.

Oss: affinché esistano i limiti da dx e sin in x_0, debbo prendere $x_0 \in \mathring{I}$

Oss: Negli estremi dell'intervallo, una funzione convessa può essere discontinua

Esempio (funzione convessa su $[-1,1]$, ma discontinua su $\{-1,1\}$)

La funzione $f(x) = \begin{cases} 3 & x=-1 \\ x^2 & -1<x<1 \\ 4 & x=1 \end{cases}$

risulta essere

(i) continua su $]-1,1[$

(ii) discontinua nei punti $x=-1,\ 1$

(iii) convessa su $[-1,1]$

I punti (i) e (ii) sono semplici da provare.
Il punto (iii): f è convessa su $]-1,1[$, come abbiamo provato in precedenza.

Per provare la convessità in $[-1,1]$ debbo

- prendere $x=-1$ e $y=1$ e provare che

$$f(-(1-t)+t) \leq (1-t)f(-1)+tf(1) \quad \forall t\in\,]0,1[$$
$$(2t-1)^2 \leq 3-3t+4t = 3+t \quad \forall t\in\,]0,1[\quad \text{VERO!}$$

- prendere $x=-1$ e $y\in\,]-1,1[$ e provare che

$$f(-(1-t)+ty) \leq (1-t)f(-1)+tf(y) = 3(1-t)+ty^2 \quad \forall t\in\,]0,1[$$

ma $f(-(1-t)+ty) \leq (1-t)\cdot 1^2 + ty^2 \quad \forall t\in\,]0,1[\ \forall y\in\,]-1,1[$ (x^2 è convessa)

quindi mi basta provare che

$$(1-t)+\cancel{ty^2} \leq 3(1-t)+\cancel{ty^2} \quad \forall t\in\,]0,1[\ \forall y\in\,]-1,1[\quad \underline{\underline{\text{VERO!}}}$$

- prendere $x\in\,]-1,1[$ e $y=1$ e provare che

$$f(x(1-t)+t) \leq (1-t)x^2+4t \quad \forall t\in\,]0,1[$$

ma $f(x(1-t)+t) \leq (1-t)x^2+t \quad \forall t\in\,]0,1[\ \forall x\in\,]-1,1[$

quindi mi basta provare che

$$\cancel{(1-t)x^2}+t \leq \cancel{(1-t)x^2}+4t \quad \forall t\in\,]0,1[\ \forall x\in\,]-1,1[\quad \underline{\underline{\text{VERO!}}}$$

Oss: Dire che una funzione è convessa significa che

presi due punti sul grafico, il segmento che li congiunge sta "sopra" al grafico

Oss: Analogamente, costruita la tangente al grafico in un punto $y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$ si ha che

$$\{(x, f(x)) : x \in I\} \subseteq \{y \geq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)\}$$

ovvero il grafico è $\subseteq$ in uno dei due semipiani individuati dalla retta Tg

Teorema

$f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo, f derivabile $\forall x \in I$. Sono tra loro equivalenti

1) f convessa su I

2) $\forall x_0, x_1 \in I \qquad f(x_1) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)$

dim

1) $\Rightarrow$ 2)

f convessa $\Rightarrow R_{x_0}(x)$ è crescente $\forall x \in I \setminus \{x_0\}$

Preso $x_0 < x_1 \Rightarrow R_{x_0}(x) \leq R_{x_0}(x_1) \qquad \forall x < x_1$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} R_{x_0}(x) = f'(x_0) \leq \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = R_{x_0}(x_1)$$

$$\Rightarrow f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) \leq f(x_1)$$

Preso $x_1 < x_0 \Rightarrow R_x(x_1) \leq R_x(x_0) \qquad \forall x \in [x_1, x_0]$

$$\Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} \leq \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq f'(x_0) \quad \forall x \in [x_1, x_0]$$

$$\Rightarrow \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} \leq f'(x_0) \Rightarrow f(x_0) - f(x_1) - f'(x_0)(x_0 - x_1) \leq 0$$

$$\Rightarrow f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) \leq f(x_1)$$

Bisogna provare 2) => 1)

Fissati $x<y$, proviamo che $\forall \omega \in]x,y[$

$$f(\omega) \leq \frac{\omega-y}{x-y} f(x) + \frac{x-\omega}{x-y} f(y)$$

Utilizzando la 2

Preso $\omega \in]x,y[$

$$f(x) \geq f(\omega) + f'(\omega)(x-\omega)$$
$$f(y) \geq f(\omega) + f'(\omega)(y-\omega)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x)-f(\omega) \geq f'(\omega)(x-\omega) \\ f(y)-f(\omega) \geq f'(\omega)(y-\omega) \end{cases} \Rightarrow \frac{f(x)-f(\omega)}{x-\omega} \leq f'(\omega) \leq \frac{f(y)-f(\omega)}{y-\omega}$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)(y-\omega)-f(\omega)(y-\omega)-f(y)(x-\omega)+f(\omega)(x-\omega)}{(x-\omega)(y-\omega)} \leq 0$$

$$\Rightarrow f(\omega)(x-y) - f(x)(\omega-y) - f(y)(x-\omega) \geq 0$$

$$\Rightarrow f(\omega) - f(x)\frac{\omega-y}{x-y} - f(y)\frac{x-\omega}{x-y} \leq 0 \qquad \forall \omega \in]x,y[$$

$$\Rightarrow f(\omega) \leq \frac{\omega-y}{x-y} f(x) + \frac{x-\omega}{x-y} f(y) \qquad \forall \omega \in]x,y[\quad \checkmark$$

Teorema (f convessa se f' debolmente crescente)

$f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo, f derivabile $\forall x \in I$. Sono equivalenti le seguenti affermazioni

1) f convessa su I (strettamente)

2) f' debolmente crescente su I (strettamente crescente)

dim

1) $\Rightarrow$ 2) Fissati $x, y \in I$ $x<y$ devo provare $f'(x) \leq f'(y)$

Per il Teorema precedente

$$\begin{cases} f(x) \geq f(y) + f'(y)(x-y) \\ f(y) \geq f(x) + f'(x)(y-x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) - f(y) \geq f'(y)(x-y) \\ f(y) - f(x) \geq f'(x)(y-x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x} = \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \leq f'(y)$$

2) $\Rightarrow$ 1) Fisso $x, y \in I$ e voglio provare che

$$f(x) \geq f(y) + f'(y)(x-y) \quad \text{o} \quad f(y) \geq f(x) + f'(x)(y-x)$$

non è restrittivo

$x<y$ Considero $f: [x,y] \to \mathbb{R}$, che soddisfa le ipotesi del Teorema di Lagrange per cui

$$\exists\, \omega \in]x,y[\text{ T.c. } f'(\omega) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

Essendo f' debolmente crescente

$$f'(x) \leq f'(\omega) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq f'(y)$$

da cui segue

$$f'(x)(y-x) \leq f(y) - f(x) \quad \text{e} \quad f(y) - f(x) \leq f'(y)(y-x)$$

ovvero

$$f'(x)(y-x) + f(x) \leq f(y) \quad \text{e} \quad f(y) + f'(y)(x-y) \leq f(x) \quad ↯$$

Teorema (f convessa sse f'' > 0)

Sia $f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo, f derivabile 2 volte $\forall x \in I$.

Sono equivalenti le seguenti affermazioni

1) f convessa su I (strettamente convessa su I)

2) $f''(x) \geq 0 \ \forall x \in I$ ($f''(x) > 0 \ \forall x \in I$)

dim

1) $\Rightarrow$ 2) f convessa su I e derivabile

$\Downarrow$

f' è debolmente crescente su I

f' è derivabile $\forall x \in I$

$\Downarrow$

$(f')'(x) = f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$

2) $\Rightarrow$ 1) $f''(x) \geq 0 \ \forall x \in I$

$\Downarrow$

f' è debolmente crescente su I

$\Downarrow$

f è convessa su I

Def (punto di flesso)

Sia $f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo. Un punto $x_0 \in I$ tale che

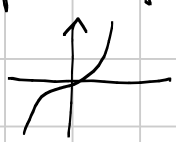
$\exists \delta > 0 : f(x) = \begin{cases} \text{concava} & x \in]x_0 - \delta, x_0[\\ \text{convessa} & x \in]x_0, x_0 + \delta[\end{cases}$ o $f(x) = \begin{cases} \text{convessa} & x \in]x_0 - \delta, x_0[\\ \text{concava} & x \in]x_0, x_0 + \delta[\end{cases}$

si dice "PUNTO di flesso"

Oss: Quando f è derivabile 2 volte $\forall x \in I$, i punti di flesso sono le soluzioni di

$$f''(x) = 0$$

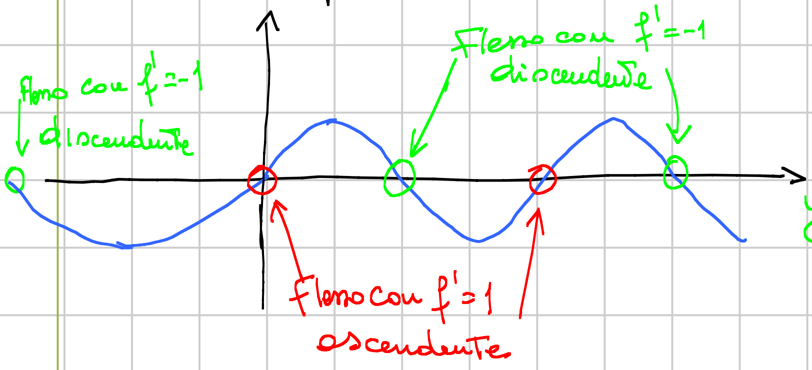
Esempio: $f(x) = x^3$ ha un punto di flesso in $x_0 = 0$



$f'(0) = 0$ flesso a Tg orizzontale

Esempio $f(x) = \operatorname{sen} x$ ha ∞ punti di flesso dati dalle soluzioni di

$$f''(x) = (\cos x)' = -\operatorname{sen} x = 0 \quad \underline{se} \quad x = k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$



$x_M = 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$
punti di flesso ascendenti

$y_m = \pi + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$
punti di flesso discendenti

Problema: esistono funzioni che sono simultaneamente convesse e concave?

SÌ: sono i polinomi di 1° grado, ovvero le rette

$$f(x) = ax + b$$

Problema: dato $f: I \to f(I)$, I intervallo, convessa e crescente, cosa posso dire di $f^{-1}: f(I) \to I$?

Risposta: f CONVESSA e crescente $\Rightarrow$ f è continua e crescente

$\Rightarrow \exists f^{-1}: f(I) \to I$ continua e crescente

però $f^{-1}(x)$ è CONCAVA

Proviamolo nel caso in cui f derivabile 2 volte
(e quindi pure f^{-1} è derivabile 2 volte)

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$

$$\left(f^{-1}\right)''(x) = \left[\frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}\right]' = \frac{-f''\left(f^{-1}(x)\right)\cdot\left[f^{-1}\right]'(x)}{\left[f'\left(f^{-1}(x)\right)\right]^2}$$

$$= -\frac{f''\left(f^{-1}(x)\right)}{\left[f'\left(f^{-1}(x)\right)\right]^2}\cdot\frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$

$$= -\frac{f''\left(f^{-1}(x)\right)}{\left[f'\left(f^{-1}(x)\right)\right]^3}$$

Ne segue che, se $\boxed{f \text{ convessa e crescente e derivabile 2 volte}}$

allora $f'' \geq 0$ e $f' \geq 0$

allora $\left(f^{-1}\right)'(x) \geq 0$ e $\left(f^{-1}\right)''(x) \leq 0$

allora $\boxed{\begin{array}{c} f^{-1}(x) \text{ è crescente e concava} \\ \text{e derivabile 2 volte} \end{array}}$