Lezione 33 - Analisi Matematica 1 - dicembre 2013

Nota: perché usare la base "e" nei logaritmi?
" " i radianti nelle misure degli angoli?

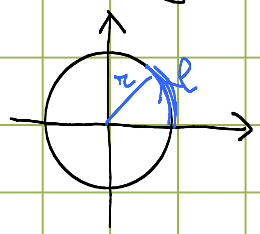
Come definizione di radiante si ha il rapporto tra

N = lunghezza arco di circonferenza sotteso dall'angolo (orientato posit. in senso antiorario)

D = lunghezza del raggio della circonferenza

La misura in radianti, è un numero puro

La proporzione che lega (misura in radianti) e (misura in gradi) è la seguente



$$\frac{(\text{gradi})}{(\text{radianti})} = \frac{360}{2\pi r}$$

Se poi si considera la circonferenza trigonometrica, dove $r=1$, si ha

$$(\text{Misura in gradi}) = (\text{Misura in radianti}) \cdot \frac{180}{\pi}$$

Se ora vediamo a introdurre una funzione che associa il seno dell'angolo alla misura dell'angolo in gradi

$$\alpha \longmapsto G\,\text{sen}(\alpha)$$

Necessariamente

$$G\,\text{sen}(\alpha) \doteq \text{sen}\left(\alpha \cdot \frac{\pi}{180}\right)$$

e dunque

$$\frac{d}{dx}\left(G\,\text{sen}\,x\right) = \frac{d}{dx}\left(\text{sen}\,\frac{\pi}{180}\cdot x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{180}\cdot x\right)\cdot\frac{\pi}{180}$$

e dunque mi ritrovo un fattore moltiplicativo $\dfrac{\pi}{180}$.

Questa osservazione può far capire i vantaggi del misurare gli angoli

Una volta definito $e = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \in]2,3[$

(questo è una forma indeterminata del tipo 1^∞: si ricordi che
$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n \longrightarrow 1 \quad \text{mentre} \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \longrightarrow +\infty)$$

A partire da questo risultato, si definisce

$$e^x = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

e questa funzione gode di moltissime proprietà, tra cui
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^0}{x-0} = 1 \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{e^x - e^{x_0}}{x-x_0} = e^{x_0}$$

ovvero detta $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$
ovvero la derivata di e^x coincide con e^x.

Ne segue che $$\frac{d}{dx}\log_e(x_0) = \frac{1}{\left[\frac{d}{dx}e^x\right](\log_e x_0)} = \frac{1}{e^{\log_e x_0}} = \frac{1}{x_0}$$

Se si desidera calcolare $\frac{d}{dx} \operatorname{Log} x$, dove

$\operatorname{Log} x = \log_{10} x$ (logaritmi in base 10, di Briggs)

Va tenuto conto della formula seguente

$$y = \log_{10} x \quad \text{sse} \quad 10^y = x = e^{\log x}$$
$$\text{sse} \quad e^{y \log 10} = e^{\log x}$$
$$\text{sse} \quad y \log 10 = \log x \quad \text{sse} \quad y = \frac{\log_e x}{\log_e 10}$$

Dunque $\operatorname{Log} x = \frac{\log_e(x)}{\log_e 10} \Rightarrow \frac{d}{dx}\operatorname{Log} x = \frac{1}{\log_e 10} \cdot \frac{1}{x}$

Il Teorema dell'Hôpital

Teorema (di Cauchy – provato in precedenza come corollario del Teorema di Rolle)

Siano $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$
i) continue su $[a,b]$
ii) derivabili su $]a,b[$
iii) $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a,b[$

Allora $\exists z \in]a,b[\; : \; \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(z)}{g'(z)}$

Teorema (dell'Hôpital nella forma $\frac{0}{0}$)

$f, g :]a,b[\to \mathbb{R}$

(i) derivabili su $]a,b[$

(ii) $\exists \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = 0$

(iii) $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a,b[$

Se $\exists \lim_{x \to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ allora $\exists \lim_{x \to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$

dim

Essendo $g'(x) \neq 0 \; \forall x \in]a,b[\Rightarrow g$ strettamente monotona $+ \lim_{x \to a^+} g = 0$

$\Rightarrow g(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a,b[$

Definiamo $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in]a,b[\\ 0 & x = a \end{cases} \qquad \tilde{g}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in]a,b[\\ 0 & x = a \end{cases}$

si ha che $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ sono continue in $x = a$

Dunque $\tilde{f}, \tilde{g}$ sono continue su $[a,c]$ ove $c = \dfrac{a+b}{2}$

" derivabili su $]a,b[$

$\tilde{g}' \neq 0 \quad \forall x \in]a,c[$

$\Rightarrow \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(a)}{\tilde{g}(x) - \tilde{g}(a)} \underset{\uparrow}{=} \dfrac{f'(z)}{g'(z)} \Rightarrow \lim_{x \to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \dfrac{f'(z)}{g'(z)} = \lim_{z \to a^+} \dfrac{f'(z)}{g'(z)} = \ell$

Per il Teorema di Cauchy $\exists z \in]a,c[$ t.c.

$\tilde{g}$ risulta strettamente monotona su $]a,c[$

$$\frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)} = \frac{\tilde{f}(x)-\tilde{f}(a)}{\tilde{g}(x)-\tilde{g}(a)} = \frac{\tilde{f}'(z)}{\tilde{g}'(z)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}$$

Teorema di Cauchy

z compreso tra a e x

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+}\frac{f'(z)}{g'(z)} = \lim_{z\to a^+}\frac{f'(z)}{g'(z)}$$

che è la Tesi (z compresa tra a e $x \Rightarrow |z-a| \le |z-x|$) $\not\subset$

Teorema (dell'Hôpital - forma ∞/∞)

Siano $f,g:]a,b[\to \mathbb{R}$ due funzioni

(i) f,g derivabili $\forall x \in]a,b[$

(ii) $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = \infty$

(iii) $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in]a,b[$

Se $\exists \lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}}$ allora $\exists \lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}}$

dim

Supponiamo $l \in \mathbb{R}$. Per ipotesi

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta_1>0 : \ x \in]a,a+\delta_1[\Rightarrow \left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - l\right| < \varepsilon$$

$\forall x \in]a,a+\delta_1[$, $f,g: [x,a+\delta_1] \to \mathbb{R}$ soddisfano il Teorema di Cauchy

e perciò

$$\frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{1-\frac{f(a+\delta_1)}{f(x)}}{1-\frac{g(a+\delta_1)}{g(x)}} = \frac{f(x)-f(a+\delta_1)}{g(x)-g(a+\delta_1)} = \frac{f'(t(x))}{g'(t(x))} \quad \text{con } t(x) \in]x,a+\delta_1[$$

Dunque $\frac{f(x)}{g(x)} = \psi(x)\cdot\frac{f'(t(x))}{g'(t(x))}$ ove $\psi(x) = \dfrac{1-\frac{g(a+\delta_1)}{g(x)}}{1-\frac{f(a+\delta_1)}{f(x)}}$

t.c. $\lim_{x\to a^+}\psi(x) = 1$

da cui

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta_2>0 : \ \delta_2<\delta_1 \quad x \in]a,a+\delta_2[\Rightarrow \begin{cases} |\psi(x)-1| < \varepsilon \\ |\psi(x)| \le 2 \end{cases}$$

Ne segue che

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\ell\right| = \left|\psi(x)\cdot\frac{f'(t(x))}{g'(t(x))}-\psi(x)\cdot\ell+\psi(x)\,\ell-\ell\right|$$

$$\leq |\psi(x)|\cdot\left|\frac{f'(t(x))}{g'(t(x))}-\ell\right| + |\psi(x)-1|\cdot|\ell|$$

$$\leq (2+|\ell|)\cdot\varepsilon$$

quando $x\in\,]a,a+\delta_2[$ (e dunque, per il Teorema di Cauchy, $t(x)\in\,]x,a+\delta_2[$)

Dunque

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta_2<\delta_1 : x\in\,]a,a+\delta_2[\ \Rightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)}-\ell\right|<\varepsilon$$

cioè la tesi

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\ell$$

Supponiamo $\ell=+\infty$

$$\forall M>0\ \exists\delta_1>0 : a<x<a+\delta_1 \qquad \frac{f'(x)}{g'(x)}>M$$

$\forall x\in\,]a,a+\delta_1[$, $f,g:[x,a+\delta_1]\to\mathbb{R}$ soddisfano il Teorema di Cauchy

e perciò

$$\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\frac{1-\frac{f(a+\delta_1)}{f(x)}}{1-\frac{g(a+\delta_1)}{g(x)}} = \frac{f(x)-f(a+\delta_1)}{g(x)-g(a+\delta_1)} = \frac{f'(t(x))}{g'(t(x))} \qquad \text{con } t(x)\in\,]x,a+\delta_1[$$

Dunque

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\psi(x)\cdot\frac{f'(t(x))}{g'(t(x))} \quad \text{ove}\quad \psi(x)=\frac{1-\frac{g(a+\delta_1)}{g(x)}}{1-\frac{f(a+\delta_1)}{f(x)}}$$

$$\text{t.c. } \lim_{x\to a^+}\psi(x)=1$$

ovvero

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta_2<\delta_1 : x\in\,]a,a+\delta_2[\ \Rightarrow 1-\varepsilon<\psi(x)<1+\varepsilon$$

ovvero

$$\exists\delta_2<\delta_1 : x\in\,]a,a+\delta_2[\ \Rightarrow \tfrac{1}{2}<\psi(x)$$

Ne segue che

$$\forall M>0\ \exists\delta_2<\delta_1\quad x\in\,]a,a+\delta_1[\ \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)}=\psi(x)\cdot\frac{f'(t(x))}{g'(t(x))}>\frac{1}{2}M$$

ovvero

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty$$

Analogamente si procede se $\ell=-\infty$

Osservazione: Nell'applicare il Teorema dell'Hôpital va prestata attenzione alle svariate ipotesi da verificare

Controesempio (non posso applicare l'Hôpital)

Calcolare $\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x-\frac{\pi}{2}}$

dim

Questo limite non è una forma indeterminata ma è della forma $1/0^+$ e quindi

$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x-\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Ma se applico l'Hôpital

$$\boxed{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x-\frac{\pi}{2}} \overset{(H)}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \frac{\cos x}{1} = 0}$$

È sbagliato!! non vale l'uguaglianza

Non posso applicare l'Hôpital poichè NON È una forma indeterminata !!!

Controesempio (non posso applicare l'Hôpital)

Data $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} 1/x, & \text{se } x\neq 0 \\ 0, & \text{se } x=0 \end{cases}$, calcolare $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$

dim

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} x\cdot \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$$

mentre se applico l'Hôpital

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} \overset{(H)}{=} \lim_{x\to 0} \left(2x \operatorname{sen}\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right) \text{ e questo } \nexists}$$

questa uguaglianza non è vera

In questo caso non posso applicare l'Hôpital poichè non esiste $\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$!!!!

Applicazione del Teorema dell'Hôpital

Teorema $\big((\text{Derivata dx}) = (\text{Derivata sin}) = \ell \Rightarrow \exists\, (\text{Derivata}) = \ell\big)$

$f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathring{A}$, f derivabile in $A \setminus \{x_0\}$

$\exists \lim_{x \to x_0^-} f'(x) = \alpha_-$ $\qquad \exists \lim_{x \to x_0^+} f'(x) = \alpha_+$

Allora

(i) $\alpha_- = f'_-(x_0)$ $\qquad \alpha_+ = f'_+(x_0)$

(ii) Se $\alpha_- = \alpha_+$ allora $\exists f'(x_0) = \alpha_- = \alpha_+$

dim

(i) $$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \overset{(H)}{=} \lim_{x \to x_0^-} f'(x) = \alpha_-$$

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \overset{(H)}{=} \lim_{x \to x_0^+} f'(x) = \alpha_+$$

(ii) se $\alpha_- = \alpha_+$ allora $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$ allora $\exists f'(x_0) = \alpha_+ = \alpha_-$

Esercizio: Determinare $a, b, c \in \mathbb{R}$ tali che

$$f(x) = \begin{cases} (a-1)x + b - a, & \text{se } x > 0 \\ 3, & \text{se } x = 0 \\ cx - x^2 - 3b, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

risulti derivabile su $\mathbb{R}$.

dim.

$f(x) = (a-1)x + b - a$ è derivabile $\forall x < 0$ $\qquad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$

$f(x) = cx - x^2 - 3b$ " " $\forall x > 0$ "

Resta dunque da vedere se f è derivabile in $x = 0$

Iniziamo a vedere per quali a, b, c f è continua in $x = 0$

$$\lim_{x \to 0^-} [(a-1)x + b - a] = b - a = 3 = -3b = \lim_{x \to 0^+} (cx - x^2 - 3b)$$

come pure

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} (a-1) = (a-1) = c = \lim_{x \to 0^+} (c - 2x) = \lim_{x \to 0^+} f'(x)$$

ovvero

$$\begin{cases} b - a = 3 \\ -3b = 3 \\ a - 1 = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = b - 3 = -4 \\ b = -1 \\ c = a - 1 = -5 \end{cases}$$

dunque f è derivabile su $\mathbb{R}$ se $a = -4$, $b = -1$ e $c = -5$

Sviluppi di Taylor

Sappiamo che $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$

- Proviamo che $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{x^2} = \frac{1}{2}$

  infatti

  $$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{x^2} \overset{(H)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{2x} = \frac{1}{2}$$

- Proviamo che $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x-\frac{x^2}{2}}{x^3} = \frac{1}{6}$

  infatti

  calcolo precedente

  $$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x-\frac{x^2}{2}}{x^3} \overset{(H)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{3x^2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

- Proviamo che $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x-\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}}{x^4} = \frac{1}{4!}$

Più in generale, $\forall m \geq 1$

- Proviamo che $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-\sum_{k=0}^{m-1}\frac{x^k}{k!}}{x^m} = \frac{1}{m!}$

che equivale a scrivere

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-\sum_{k=0}^{m}\frac{x^k}{k!}}{x^m} = 0 \quad \text{ovvero} \quad e^x-\sum_{k=0}^{m}\frac{x^k}{k!} = o(x^m)$$

per $x\to 0$

e quindi ritroviamo quello sviluppo della funzione e^x per $x\to 0$ che era stato offerto senza dimostrazione

Analogamente $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

Come pure $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x^2} \overset{(H)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{2x} \overset{(H)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen} x}{2} = 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x^3} \overset{(H)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} \overset{(H)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen} x}{6x} \overset{(H)}{=} -\frac{1}{6} = -\frac{1}{3!}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x + x^3/3!}{x^4} \overset{(H)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{4x^3} \overset{(H)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen} x + x}{12x^2} \overset{(H)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x + 1}{24x}$$

$$\overset{(H)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{24} = 0$$

e dunque ritroviamo, in termini di "o-piccolo"

$\operatorname{sen} x - x = o(x^2)$

$\operatorname{sen} x - \left(x - \frac{x^3}{3!}\right) = o(x^4)$ per $x \to 0$

e più in generale, $\forall n > 0$

$$\operatorname{sen} x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^{2n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) = o\left(x^{2n+2}\right)$$

Analogamente ancora

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1 + x^2/2}{x^3} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen} x + x}{3x^2} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x + 1}{6x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{6} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1 + x^2/2}{x^4} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen} x + x}{4x^3} \overset{H}{=} \dots \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{24} = \frac{1}{4!}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1 + x^2/2 - x^4/4!}{x^5} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen} x + 1 - \frac{x^3}{6}}{5x^4} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x - \frac{x^2}{2}}{20x^3} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{60x^2} \overset{H}{=}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{120x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen} x}{120} = 0$$

e dunque

$\cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) = o(x^3)$

$\cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}\right) = o(x^5)$ per $x \to 0$!

e più in generale, $\forall n > 0$

$$\cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{2n} \frac{x^{2n}}{(2n)!}\right) = o\left(x^{2n+1}\right)$$

Polinomio di Taylor

Data $f: A \to \mathbb{R}$ derivabile in $x_0 \in A$, si ha

$$f(x) - \left(f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)\right) = o(|x-x_0|) \quad \text{per } x \to x_0$$

ovvero la retta T_g è il polinomio di 1° grado che meglio approssima $f(x)$

Def. (Polinomio di Taylor)

Data $f:]a,b[\to \mathbb{R}$, $x_0 \in]a,b[$, $n \in \mathbb{N}$. Il polinomio

$$P_n = a_n(x-x_0)^n + a_{n-1}(x-x_0)^{n-1} + \dots + a_1(x-x_0) + a_0 \qquad a_i \in \mathbb{R}$$

si dice "polinomio di Taylor di ordine n di f centrato in x_0

se $f(x) - P_n(x) = o(|x-x_0|^n)$ $\quad x \to x_0$

Teorema (Unicità del Polinomio di Taylor)

Il polinomio di Taylor, se esiste, allora è unico

dim

Per assurdo esistono 2 polinomi di Taylor

$$f(x) - P_n(x) = o(|x-x_0|^n) \qquad P_n = a_n(x-x_0)^n + \dots + a_1(x-x_0) + a_0$$

$$f(x) - Q_n(x) = o(|x-x_0|^n) \qquad Q_n = b_n(x-x_0)^n + \dots + b_1(x-x_0) + b_0$$

Allora $P_n(x) - Q_n(x) = o(|x-x_0|^n)$ $\quad x \to x_0$.

dove $P_n(x) - Q_n(x) = (a_n - b_n)(x-x_0)^n + (a_{n-1}-b_{n-1})(x-x_0)^{n-1} + \dots + (a_0 - b_0) = o$

Ma si sa che

$$P_n(x_0) - Q_n(x_0) = (a_0 - b_0) = 0 \Rightarrow \boxed{a_0 = b_0}$$

ne segue

$$C_n(x) = P_n(x) - Q_n(x) = (x-x_0)\left[(a_n-b_n)(x-x_0)^{n-1} + \dots + (a_2-b_2)(x-x_0) + (a_1-b_1)\right] = o(|x-x_0|^n)$$

per $x \to x_0$

da cui deduco

$$C_{n-1}(x) = (a_n-b_n)(x-x_0)^{n-1} + \dots + (a_2-b_2)(x-x_0) + (a_1-b_1) = o(|x-x_0|^{n-1}) \quad \text{per } x \to x_0$$

Ma si ha che

$$C_{n-1}(x_0) = a_1 - b_1 = 0 \Rightarrow \boxed{a_1 = b_1}$$

e ne segue che

$$C_{n-1}(x)=(x-x_0)\cdot\left[(a_n-b_n)(x-x_0)^{n-2}+\dots+(a_2-b_2)\right]=o(|x-x_0|^{n-1})\quad x\to x_0$$

da cui segue che

$$C_{n-2}(x)=(a_n-b_n)(x-x_0)^{n-2}+\dots+a_2-b_2=o(|x-x_0|^{n-2})\quad x\to x_0$$

Proseguendo in questo modo, in n passi scopro che

$$a_i=b_i\quad\forall i=0,\dots,n$$

ovvero che $P_n(x)=Q_n(x)$, il che implica l'unicità cercata.

Teorema (Formula di Taylor con il resto di Peano)

$f:\,]a,b[\,\longrightarrow\mathbb{R}$, $x_0\in\,]a,b[$

f derivabile $n-1$ volte in $]a,b[$

f derivabile n " " x_0

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

Allora $f(x)-P_n(x)=o(|x-x_0|^n)\quad x\to x_0$

dim

$$P_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$$P_n'(x)=f'(x_0)+f''(x_0)(x-x_0)+\dots+\frac{f^{(n)}}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}$$

$$P_n''(x)=f''(x_0)+f'''(x_0)(x-x_0)+\dots+\frac{f^{(n)}}{(n-2)!}(x-x_0)^{n-2}$$

.....

$$P_n^{(n-1)}(x)=f^{(n-1)}(x_0)+f^{(n)}(x_0)(x-x_0)$$

$$P_n^{(n)}(x)=f^{(n)}(x_0)$$

Ne segue che

$$P_n(x_0)=f(x_0)\,;\quad P_n'(x_0)=f'(x_0)\,;\quad P_n''(x_0)=f''(x_0)$$

$$\dots\,;\quad P_n^{(n-1)}(x_0)=f^{(n-1)}(x_0)\,;\quad P_n^{(n)}(x_0)=f^{(n)}(x_0)$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\overset{0/0}{f(x)-P_n(x)}}{(x-x_0)^n}\overset{(H)}{=}\lim_{x\to x_0}\frac{\overset{0/0}{f'(x)-P_n'(x)}}{n(x-x_0)^{n-1}}\overset{(H)}{=}\lim_{x\to x_0}\frac{\overset{0/0}{f''(x)-P_n''(x)}}{n(n-1)(x-x_0)^{n-2}}$$

$$\dots\overset{(H)}{=}\lim_{x\to x_0}\frac{\overset{0/0}{f^{(n-1)}(x)-P_n^{(n-1)}(x)}}{n!\,(x-x_0)}$$

sostituendo l'espressione di $P_n^{(n-1)}(x)$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)-f^{(n)}(x_0)(x-x_0)}{n!\,(x-x_0)}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{n!\,(x-x_0)}-\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

$f^{(n-1)}$ è derivabile in x_0

$$=0$$

Esempio $f(x) = e^x$ calcolare P_n in $x_0=0$

$$f(x) = f'(x) = f''(x) = \dots = f^{(n)}(x) = e^x \qquad x_0 = 0$$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

Esempio $f(x) = e^x$ Calcolare $P_3(x)$ in $x_0=1$

$$f(x) = f'(x) = f''(x) = f'''(x) = e^x$$

$$P_3(x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(1)}{k!} \cdot (x-1)^k = e + e(x-1) + e\frac{(x-1)^2}{2} + e\frac{(x-1)^3}{6}$$

Esempio $f(x) = x - \frac{x^3}{3} + 2x^4 - x^6$

(i) Calcolare il polinomio $P_5(x)$ in $x_0=0$

(ii) Calcolare " " $P_3(x)$ in $x_0=1$

(i) $P_5(x) = x - \frac{x^3}{3} + 2x^4$

(ii) $f(x) = x - \frac{x^3}{3} + 2x^4 - x^6 \qquad f(1) = 5/3$

$f'(x) = 1 - x^2 + 8x^3 - 6x^5 \qquad f'(1) = 2$

$f''(x) = -2x + 24x^2 - 30x^4 \qquad f''(1) = -8$

$f'''(x) = -2 + 48x - 120x^3 \qquad f'''(1) = -74$

$$P_3(x) = \frac{5}{3} + 2(x-1) - 4(x-1)^2 - \frac{37}{3}(x-1)^3$$

Oss: Con il resto di Peano non si può quantificare l'errore che si commette sostituendo $f(x)$ con il valore $P_n(x)$: questo perché $f(x) - P_n(x) = o(|x-x_0|^n)$, ovvero quando $x \to x_0$ la $(f(x) - P_n(x)) \to 0$, ma non so dare una stima di $|f(x) - P_n(x)|$

Esempio $\quad \operatorname{sen} x - \left(x - \frac{x^3}{6}\right) = o(x^4)$ per $x \to 0$

però $|\operatorname{sen} x| \le 1$ mentre $\sup \left(x - \frac{x^3}{6}\right) = +\infty$!!

Teorema (Formula di Taylor con il resto di Lagrange)

$f:]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in]a,b[$

f derivabile $n+1$ volte in $]a,b[$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

$\Rightarrow \exists z$ compreso tra x_0 e x t.c.

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

Oss Il Teorema precedente continua a valere poiché

$$\frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} = o(|x-x_0|^n) \qquad x \to x_0$$

infatti,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}\cancel{(x-x_0)^{n+1}} \cdot \frac{1}{\cancel{(x-x_0)^n}} = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} \cdot \lim_{x \to x_0}(x-x_0)$$

$$= \lim_{z \to x_0} \quad '' \quad \cdot \lim_{x \to x_0}(x-x_0) = 0$$

dim

Poniamo $g(t) = f(t) - P_n(t)$ $\qquad h_k(t) = (t-x_0)^k \quad k=0,\dots,n+1$

$g(x_0) = h_{n+1}(x_0) = 0$

Th. Cauchy $\exists z_1$ compreso tra x_0 e x t.c.

$$\frac{g(x)}{h_{n+1}(x)} = \frac{g(x)-g(x_0)}{h_{n+1}(x)-h_{n+1}(x_0)} = \frac{g'(z_1)}{h'_{n+1}(z_1)} = \frac{g'(z_1)}{(n+1)\,h_n(z_1)}$$

$g'(x_0) = h_n(x_0) = 0$

Teorema Cauchy: $\exists z_2$ compreso tra x_0 e z_1

$$= \frac{1}{n+1}\,\frac{g'(z_1)-g'(x_0)}{h_n(z_1)-h_n(x_0)} = \frac{1}{(n+1)}\cdot\frac{g''(z_2)}{h'_n(z_2)} = \frac{g''(z_2)}{(n+1)n\cdot h_{n-1}(z_2)}$$

$g''(x_0) = h_{n-1}(x_0)$

Teorema Cauchy: $\exists z_3$ compreso tra z_2 e x_0 t.c.

$$= \frac{1}{n(n+1)}\,\frac{g''(z_2)-g''(x_0)}{h_{n-1}(z_2)-h_{n-1}(x_0)} = \frac{1}{n(n+1)}\cdot\frac{g'''(z_3)}{h'_{n-1}(z_3)} = \frac{1}{(n+1)(n)(n-1)}\,\frac{g'''(z_3)}{h_{n-2}(z_3)} =$$

$g^{(n)}(x_0) = h_1(x_0) = 0$

Teorema Cauchy $\exists z_{n+1}$ compreso tra z_n e x_0

$$\dots = \frac{1}{(n+1)!}\,\frac{g^{(n)}(z_n)}{h_1(z_n)} = \frac{1}{(n+1)!}\,\frac{g^{(n)}(z_n)-g^{(n)}(x_0)}{h_1(z_n)-h_1(x_0)} = \frac{1}{(n+1)!}\,\frac{g^{(n+1)}(z_{n+1})}{h'_1(z_{n+1})}$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\,\frac{f^{(n+1)}(z_{n+1}) - P_n^{(n+1)}(z_{n+1})}{1} = \frac{f^{(n+1)}(z_{n+1})}{(n+1)!}$$

(la derivata $(n+1)$-esima di un polinomio grado n è $=0$)

Applicazione

Quale errore commetto approssimando

$\operatorname{sen}(1/2)$ con $P_3(1/2)$, dove $P_3(x)$ è il polinomio di Taylor centrato in $x_0=0$ calcolato in $x=1/2$

$$P_3(x) = x - \frac{x^3}{6} \qquad P_3(1/2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{48} = \frac{23}{48}$$

$$\left|\operatorname{sen} x - P_3(x)\right| = \left|\frac{f^{(5)}(z)}{5!} z^5\right| = \left|\frac{\cos z}{5!} \cdot z^5\right|$$

$$\underset{|\cos x| \le 1}{\le} \left|\frac{z^5}{5!}\right| \underset{|z| \le 1/2}{\le} \frac{1}{32 \cdot 120} = \frac{1}{3840} \cong 0{,}000261$$

Dunque sostituendo $\operatorname{sen} \frac{1}{2}$ con $P_3(\frac{1}{2})$ si commette un errore $\varepsilon \le \frac{1}{3840} < \frac{261}{10^6}$

e questo errore è molto piccolo (provare a calcolare $\left(\operatorname{sen} \frac{1}{2} - \frac{23}{48}\right)$ con un calcolatore per vedere quanto buona sia questa approssimazione!!)

Problema Calcolare una approssimazione R di $\sqrt{65}$ tale che $|S - \sqrt{65}| < 1/10^5$

$$\sqrt{65} = \sqrt{1+64} = 8 \cdot (1 + 1/64)^{1/2}$$

$$= 8 \cdot \left[1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{64} - \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1}{64}\right)^2 + \frac{\cancel{3}^{1}}{8 \cdot \cancel{6}_2} \left(\frac{1}{64}\right)^3 + \varepsilon\right]$$

Andiamo a valutare ε. $\quad f(x) = (1+x)^{1/2}$

$$f'(x) = \frac{1}{2(1+x)^{1/2}} \qquad f''(x) = -\frac{1}{4} \frac{1}{(1+x)^{3/2}} \qquad f''' = +\frac{3}{8}(1+x)^{-5/2}$$

$$f^{IV} = -\frac{15}{16}(1+x)^{-7/2}$$

Se ora calcolo lo sviluppo di $f(x)$ in un intorno di $x=0$

$$(1+x)^{1/2} = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2} x^2 + \frac{f'''(0)}{6} x^3 + \frac{f^{IV}(\xi)}{24} \cdot \xi^4$$

dove $0 < \xi < x$

$$(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{\cancel{6}_2} \cdot \frac{\cancel{3}^{1}}{8} \cdot x^3 - \frac{1}{\cancel{24}_8} \cdot \frac{\cancel{15}^{5}}{16} \cdot \xi^4$$

$$\left(1 + \frac{1}{64}\right)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2 \cdot 8^2} - \frac{1}{8^5} + \frac{1}{2 \cdot 8^7} - \frac{5}{2 \cdot 8^2} \cdot \xi^4 \qquad \frac{5}{16} \; 4$$

dunque $\quad \varepsilon = -\frac{5}{2\cdot 8^2}\cdot \xi^4 \quad$ con $\quad 0<\xi<\frac{1}{64}$

Adesso questo valore ξ non è noto
(Il Teorema di Taylor con resto di Lagrange dice che esiste, ma non mostra come calcolarlo)

dunque $\quad |\varepsilon| \leq \max_{0<\xi<1/64} \frac{5}{2\cdot 8^2}\cdot \xi^4$

$$= \frac{5}{2\cdot 8^2}\cdot\left(\frac{1}{64}\right)^4 = \frac{5}{2\cdot 8^{10}}$$

Ne segue che, preso

$$R = 8\left(1+\frac{1}{2\cdot 8^2}-\frac{1}{8^5}+\frac{1}{2\cdot 8^7}\right)$$

$$= 8+\frac{1}{16}-\frac{1}{8^4}+\frac{1}{2\cdot 8^6}$$

commetto un errore $|8\varepsilon| = \left|\frac{5}{16}\xi^4\right| \leq \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{8^9}$

e si ha $\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{8^9} < 10^{-5}$ come desiderato

OSS: arrestando lo sviluppo di $(1+x)^{\frac{1}{2}}$ al 2° ordine, ovvero approssimando

$\sqrt{65}$ con $\left(8+\frac{1}{16}-\frac{1}{8^4}\right) = S$

si commette un errore $|\varepsilon| \leq \max_{0<\xi<1/64}\left(\frac{8}{16}\xi^3\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8^6}$

OSS: arrestando lo sviluppo di $(1+x)^{\alpha}$ al 1° ordine, ovvero approssimando

$\sqrt{65}$ con $\left(8+\frac{1}{16}\right) = S = \frac{129}{16}$

si commette un errore $|\varepsilon| \le \max_{0<\xi<1/64} \left(\frac{8}{8}\cdot \xi^2\right) = \frac{1}{8^4}$

N.B. Con il resto di Peano <u>non</u> è possibile stimare l'errore commesso!!