Lezione 31 - Analisi Matematica 1 - 26 novembre 2013

Alcune osservazioni

Oss: Data una funzione $f: A \to \mathbb{R}$, in generale
$f': B \to \mathbb{R}$ con $B \subseteq A$

Esempio 1: Presa $f(x) = e^x$, $f: \mathbb{R} \to]0,+\infty[$ si ha $f'(x) = e^x$
e dunque $f': \mathbb{R} \to]0,+\infty[$ ovvero $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(f')$

Esempio 2: Presa $f(x) = \sqrt{x}$, $f: [0,+\infty[\to \mathbb{R}$
$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ dunque $f':]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ ovvero
$\mathrm{dom}(f') \subsetneq \mathrm{dom}(f)$

Domanda: Se $g: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ t.c. $\exists\, g'(x_0)$
allora $\lim_{x \to x_0} g'(x) = g'(x_0)$??

NO: l'esistenza di $g'(x_0) \not\Rightarrow$ g continua in x_0 !!

Controesempio: $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} 1/x & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

(i) La funzione è continua in $x=0$: $\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen} 1/x = 0$

(ii) " " è derivabile in $x=0$: infatti

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \cdot x^2 \operatorname{sen} 1/x = \lim_{x \to 0} x \cdot \operatorname{sen} 1/x = 0$$

(iii) La derivata $f'(x)$ non ha limite per $x \to 0$ (ovvero è discontinua in $x=0$)

$x \neq 0$ $\quad f'(x) = 2x \cdot \operatorname{sen} 1/x - x^2 \left(\cos 1/x\right) \cdot \frac{1}{x^2} =$

$$= 2x \operatorname{sen} 1/x - \cos 1/x \xrightarrow[x \to 0]{} \!\!\!\!\!\!/ \quad$$

infatti proviamo che $\nexists \lim_{x \to 0^+} f'(x)$ (e quindi a maggior ragione $\nexists \lim_{x \to 0} f'(x)$!)

Presa $x_n = \dfrac{1}{2n\pi}$ si ha $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$

$\lim_{n\to+\infty} \cos\dfrac{1}{x_n} = 1$

e dunque $\lim_{n\to+\infty} f'(x_n) =$

$= \lim_{n\to+\infty} \left[\dfrac{1}{2n\pi}\operatorname{sen}(2n\pi) - \cos(2n\pi)\right] = -1$

Presa $y_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$ si ha $\lim_{n\to+\infty} y_n = 0$

$\lim_{n\to+\infty} \cos{}^1\!/_{y_n} = 0$

e dunque $\lim_{n\to+\infty} f'(y_n) =$

$= \lim_{n\to+\infty} \left[\dfrac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)\right] = 0$

Quindi ho trovato due successioni $\{x_n\}_n \{y_n\} \subseteq \mathbb{R}\setminus\{0\}$

tali che $x_n \xrightarrow[n]{} 0$ $y_n \xrightarrow[n]{} 0$ ma

$$\lim_n f'(x_n) = -1 \neq 0 = \lim_n f'(y_n)$$

Ne segue che $\nexists \lim_{x\to 0} f'(x)$ ↯

N.B. È stato utilizzato, nella forma $\neg A \Rightarrow \neg B$

il Teorema sui limiti di funzioni via

limiti di successioni

Retta Tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$

" f^{-1} " " $(f(x_0), x_0)$

Data $f: I \to f(I)$, I intervallo, f derivabile $\forall x \in I$ e

f strettamente crescente

allora $\exists\, f^{-1}: f(I) \to I$ derivabile $\forall x \in I$ e

f^{-1} strettamente crescente

$r(x) = f(x_0) + m(x - x_0)$, $m = f'(x_0)$, retta Tg al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$

$R(x) = x_0 + \frac{1}{m}(x - f(x_0))$ $m = f'(x_0)$, retta Tg al grafico di f^{-1} in $(f(x_0), x_0)$

Naturalmente $R(f(x_0)) = x_0$ mentre $r(x_0) = f(x_0)$

Se interseco $r(x)$ con $R(x)$ trovo

$$\begin{cases} y = f(x_0) + m(x - x_0) \\ y = x_0 + \frac{1}{m}(x - f(x_0)) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = f(x_0) + m(x - x_0) \\ x_0 + \frac{1}{m}(x - f(x_0)) = f(x_0) + m(x - x_0) \end{cases}$$

La seconda equazione diventa $m x_0 + x - f(x_0) = m f(x_0) + m^2(x - x_0)$

da cui $x(m^2 - 1) = m x_0(m+1) - f(x_0)(m+1)$

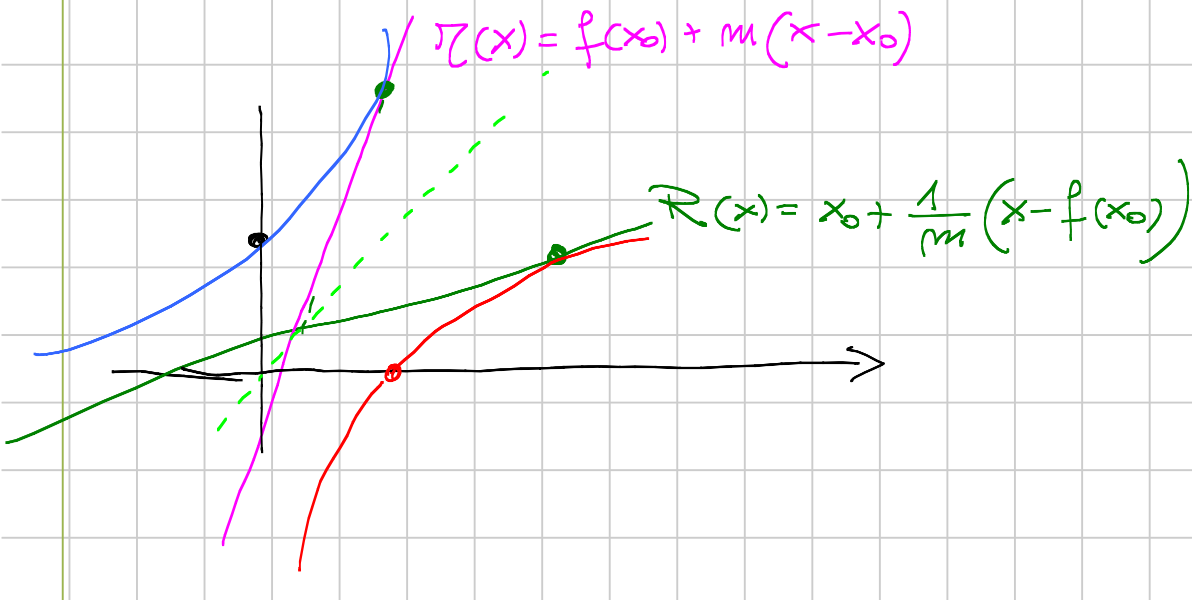
$$= (m+1)(m x_0 - f(x_0))$$

Se ora $m \neq +1, -1$ $\begin{pmatrix} m = 1 & \text{retta Tg} \parallel \text{bisettrice} \overset{y=x}{\Rightarrow} \phi \text{ soluz.} \\ m = -1 & \text{" Tg} \perp \text{ " } y = x \Rightarrow \text{rette Tg uguali} \Rightarrow \infty \text{ soluzioni} \end{pmatrix}$

allora
$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{m-1}\left(m x_0 - f(x_0)\right) \\ y = f(x_0) + m\left(\dfrac{m}{m-1}x_0 - \dfrac{f(x_0)}{m-1} - x_0\right) \end{cases}$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{m-1}\left(m x_0 - f(x_0)\right) \\ y = f(x_0) + \dfrac{m}{m-1}\left(\cancel{m x_0} - f(x_0) - \cancel{m x_0} + x_0\right) \end{cases}$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{m-1}\left(m x_0 - f(x_0)\right) \\ y = f(x_0)\,\dfrac{\cancel{m}-1-\cancel{m}}{m-1} + \dfrac{m}{m-1}x_0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{m-1}\left(m x_0 - f(x_0)\right) \\ y = \dfrac{1}{m-1}\left(m x_0 - f(x_0)\right) \end{cases}$$

ovvero le due rette tangenti si intersecano nel punto $\left(\frac{1}{m-1}\left(m x_0 - f(x_0)\right), \frac{1}{m-1}\left(m x_0 - f(x_0)\right)\right)$

che sta sulla bisettrice $y=x$!!



Derivata seconda di f = Derivata (Derivata prima di f)

Derivata Terza di f = Derivata (Derivata seconda di f)

etc

Esempio $f(x) = x^3$ $\quad f'(x) = \frac{df}{dx}(x) = 3x^2$

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)(x) = \frac{d^2 f}{dx^2} = 6x$$

etc

Esempio $f(x) = x^2$ calcolare $(f^{-1})'(x_0)$ $x_0 > 0$

f è derivabile e strett. crescente per $x > 0$

$$(f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))} = \frac{1}{2[f^{-1}(x_0)]} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

Adesso si va a esaminare il motivo principale per cui sono state introdotte le derivate

lo studio della monotonia di una funzione derivabile f !!!

Monotonia di f vs. Segno della derivata f'

Oss: $f: A \to \mathbb{R}$ strettamente crescente (decrescente)

se $\forall x,y \in A \quad x<y \Rightarrow f(x)<f(y)$ $\quad (f(x)>f(y))$

se $\forall x,y \in A,\ x \neq y,\quad \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} > 0 \quad (<0)$

Def (monotonia stretta e debole) Sia $f: A \to \mathbb{R}$

f strettamente crescente se $\forall x,y \in A\ x\neq y \quad \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} > 0$

f debolmente crescente se " " $\quad \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} \geq 0$

" debolmente decrescente se " " $\quad \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} \leq 0$

" strettamente decrescente se " " $\quad \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} < 0$

Teorema ($f'(x_0) \neq 0 \Rightarrow f$ localmente monotona)

$f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo, f derivabile in $x_0 \in I$

(i) $f'(x_0) > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : \begin{cases} f(x) < f(x_0) & \forall x \in I \cap]x_0-\delta, x_0[\\ f(x) > f(x_0) & \forall x \in I \cap]x_0, x_0+\delta[\end{cases}$

(ii) $f'(x_0) < 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : \begin{cases} f(x) > f(x_0) & \forall x \in I \cap]x_0-\delta, x_0[\\ f(x) < f(x_0) & \forall x \in I \cap]x_0, x_0+\delta[\end{cases}$

dim

(i) $f'(x_0) > 0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0 \Rightarrow$ (Teorema permanenza segno)

$\Rightarrow \exists \delta > 0 : \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0 \quad \forall x \in \left( ]x_0-\delta, x_0+\delta[\setminus \{x_0\} \right) \cap I$

$\Rightarrow \exists \delta > 0 : \begin{cases} f(x) < f(x_0) & \forall x \in I \cap]x_0-\delta, x_0[\\ f(x) > f(x_0) & \forall x \in I \cap]x_0, x_0+\delta[\end{cases}$

(ii) è perfettamente analoga con le disuguaglianze rovesciate $\lightning$

Vale un viceversa (in forma debole)

Teorema (f strett. crescente (decrescente) e derivabile in x_0 $\Rightarrow f'(x_0) \geq 0$ $(\leq)$)

$f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo, f derivabile in x_0

(i) Se f è strettamente crescente in I, allora $f'(x_0) \geq 0$

(ii) Se f è strettamente decrescente in I, allora $f'(x_0) \leq 0$

dim

(i) Per ipotesi f strettamente crescente, cioè $\forall x \neq y$ $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} > 0$

$\Rightarrow$ (pongo $x = x_0$) $\forall y \neq x_0$ $\frac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0} > 0$ ma f è derivabile in x_0

$$\Rightarrow \lim_{y \to x_0} \frac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0} = f'(x_0) \geq 0$$

(ii) analoga ma con disuguaglianze rovesciate

Oss: Si può essere tentati di concludere $f'(x_0) > 0$ nel teorema precedente, ma sarebbe falso

$f(x) = x^3$ è strettamente crescente su $\mathbb{R}$, però $f'(0) = 0$!!

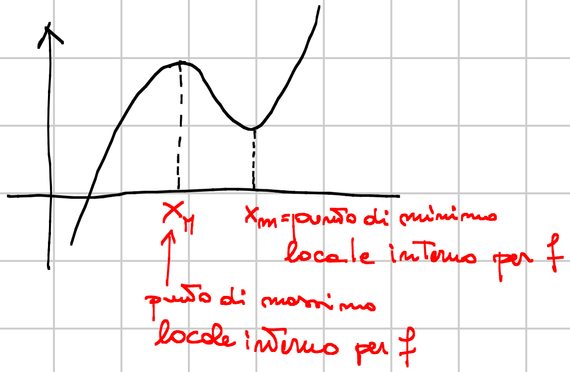
Funzioni Derivabili su un Intervallo

Def (punto di Max e min locale interno per f)

Data $f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo, $x_0 \in \mathring{I}$ = interno di I

- x_0 è "punto di massimo locale interno" se $\exists \delta > 0$ t.c. $f(x) \leq f(x_0)$ $\forall x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[\subseteq I$
- x_0 è "punto di minimo locale interno" se $\exists \delta > 0$: $f(x) \geq f(x_0)$ $\forall x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[\subseteq I$

Si aggiunge l'aggettivo "stretto" quando $f(x) \neq f(x_0)$ $\forall x \neq x_0$.



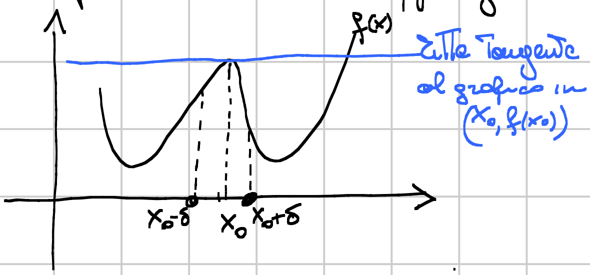
Per il seguito è fondamentale il seguente

Lemma (di Fermat)

Sia $f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo, f derivabile in I.
Se $x_0 \in \mathring{I}$ è punto di massimo (minimo) locale interno allora $f'(x_0) = 0$

dim

Per fissare le idee suppongo x_0 = punto massimo locale interno



Dobbiamo provare che
$$f'(x_0) = 0$$
ovvero che la retta Tg in $(x_0, f(x_0))$ è orizzontale

Per definizione di punto di massimo locale interno,
$$\exists \delta > 0 : \quad \forall x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[\subseteq I \qquad f(x) \le f(x_0)$$
$$\Downarrow$$
$$\exists \delta > 0 \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \ge 0, & \text{se } x_0-\delta < x < x_0 \\ \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \le 0, & \text{se } x_0 < x < x_0+\delta \end{cases}$$
$$\Downarrow$$
$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \ge 0 \ge \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_+(x_0)$$

ma f è derivabile in x_0, ovvero $\exists f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$

$\Longrightarrow$ Necessariamente $f'(x_0) = 0$ ✓

Da questo lemma seguono i Teoremi di Rolle, Lagrange e Cauchy

Teorema (di Rolle)

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ che soddisfa

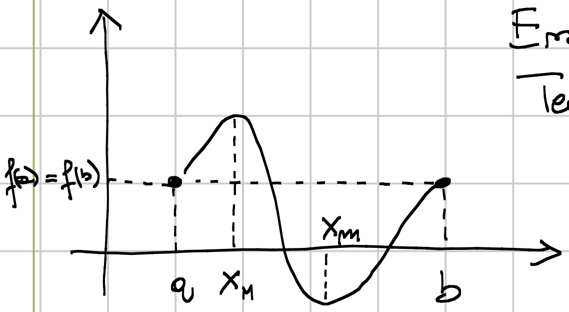
(i) f continua su $[a,b]$

(ii) f derivabile su $]a,b[$

(iii) $f(a)=f(b)$

$\Longrightarrow \exists z\in]a,b[: f'(z)=0$

dim



Essendo verificate le ipotesi del Teorema di Weierstrass, esistono $x_M, x_m \in [a,b]$ t.c.

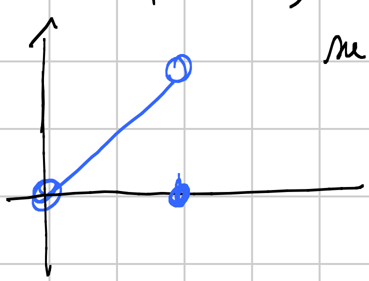
$f(x_M)=\max f([a,b])$

$f(x_m)=\min f([a,b])$

Primo caso (banale): $x_m, x_M \in \{a,b\}$. In tal caso si ha $f(a)=f(b)=f(x_m)=\min f([a,b])=\max f([a,b])$.
Ne segue $f(x)=$ costante $\forall x\in]a,b[$, e in tal caso $f'(z)=0\ \forall z\in]a,b[$ cioè la tesi

Secondo caso: almeno uno dei due punti x_m, x_M viene a cadere all'interno di $[a,b]$, ad esempio
$x_M\in]a,b[$.
In tal caso esiste $\delta>0$: $]x_M-\delta, x_M+\delta[\subset]a,b[$ t.c.
$f(x)\le f(x_M)$
ovvero esiste x_M punto di max locale
Per il Lemma di Fermat si ha che
$f'(x_M)=0$
ovvero la tesi $\lightning$

Controesempio 1 (Rolle) Non vale (i) ovvero $f(a)=f(b)$ ed f derivabile su $]a,b[$. Infatti, data $f:[0,1]\to\mathbb{R}$



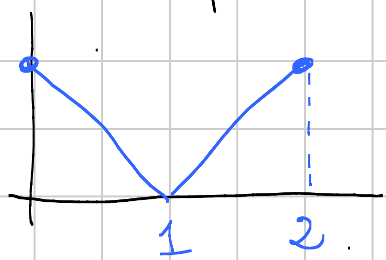
$$f(x)=\begin{cases} x & 0\le x<1 \\ 0 & x=1\end{cases}$$ si ha

$f(0)=f(1)=0$ ed f derivabile su $]0,1[$

ma non vale la Tesi Teorema Rolle $\lightning$

Controesempio 2 (Rolle) Suppongo non valga la (ii)

ovvero valgono solo le ipotesi (i) e (iii)



$$f(x)=\begin{cases} 1-x & 0\leq x<1 \\ x-1 & 1\leq x\leq 2 \end{cases}$$

ovvero

$$f(x)=|x-1| \qquad f:[0,2]\to\mathbb{R}$$

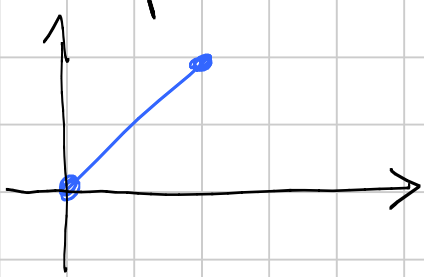
Questa funzione è continua in $[0,2]$ (ipotesi (i))

$f(0)=f(2)=1$ (" (iii))

ma non è derivabile in $x_0=1$

Per questa funzione non vale Teorema di Rolle in quanto $\forall z\in[0,$

Controesempio 3 (Rolle) Suppongo che valgono le ipotesi (i) e (ii) non la (iii).



$f(x)=x \quad x\in[0,1]$

Questa funzione soddisfa le ipotesi (i) e (ii) ma non la (iii)

Si ha che $f(x)$ non soddisfa la Tesi di Rolle ↯

Adesso proviamo il seguente

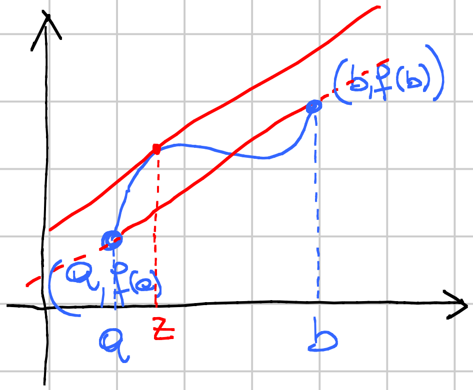
Teorema (di Lagrange)

Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ che soddisfa

(i) f continua su $[a,b]$ $\Rightarrow \exists z \in]a,b[$ t.c.

(ii) f derivabile su $]a,b[$ $\quad f'(z)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

dim



Graficamente, si prova che esiste un punto $(z,f(z))$ sul grafico t.c. la retta tangente in tale punto è // alla secante $r(x)$ per $(a,f(a))$ e $(b,f(b))$

L'equazione della retta $r(x)$ è la seguente

$$r(x)=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-a)$$

Introduciamo la funzione ausiliaria

$$g(x)=f(x)-r(x)$$

questa funzione soddisfa le seguenti proprietà

(i) $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua : vero, poiché somma di f.ni continue

(ii) $g:]a,b[\to\mathbb{R}$ derivabile : vero, poiché somma di f.ni derivabili su $]a,b[$

(iii) $g(a)=f(a)-f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(a-a)=0$

$\Rightarrow g(a)=g(b)$

$g(b)=f(b)-f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a)=0$

Th allora $g(x)$ soddisfa le Tesi del Teorema di Rolle, ovvero esiste $z\in]a,b[$ tale che

$$g'(z)=f'(z)-r'(z)=f'(z)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$$

ovvero

$$\exists z\in]a,b[\ :\ f'(z)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$\swarrow$

Teorema (di Cauchy)

Siano $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ due funzioni che soddisfano

(i) f, g continue $\forall x \in [a,b]$

(ii) f, g derivabili $\forall x \in]a,b[$

(iii) $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a,b[$

Allora $\exists z \in]a,b[$ t.c. $\dfrac{f'(z)}{g'(z)} = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

dim

Tesi equiv. : $\exists z \in]a,b[$ t.c $f'(z) \cdot \big(g(b)-g(a)\big) = g'(z)\big(f(b)-f(a)\big)$

Come nella dimostrazione del Teorema di Lagrange, introduciamo una funzione ausiliaria $h(x)$ che soddisferà la Tesi del Teorema di Rolle

$$h(x) = f(x)\big(g(b)-g(a)\big) - g(x)\big(f(b)-f(a)\big)$$

La funzione $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ soddisfa

(i) h è continua $\forall x \in [a,b]$: è combinazione lineare di funzioni continue su $[a,b]$

(ii) h è derivabile $\forall x \in]a,b[$: è combinazione lineare di funzioni derivabili in $]a,b[$

(iii) $h(a) = f(a)\big(g(b)-g(a)\big) - g(a)\big(f(b)-f(a)\big) = f(a)g(b) - f(b)g(a)$

$h(b) = f(b)\big(g(b)-g(a)\big) - g(b)\big(f(b)-f(a)\big) = -f(b)g(a) + f(a)g(b)$

$\Rightarrow h(a) = h(b)$

Quindi la funzione ausiliaria h soddisfa le ipotesi del Teorema di Rolle e dunque

$$\exists z \in]a,b[\; : \; h'(z) = f'(z)\big(g(b)-g(a)\big) - g'(z)\big(f(b)-f(a)\big) = 0$$

da cui, essendo $g'(x) \neq 0 \; \forall x \in]a,b[$

$$\exists z \in]a,b[\quad \frac{f'(z)}{g'(z)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

Conseguenze del Teorema di Lagrange

Corollario ($f'=0 \Rightarrow f$ costante)

Sia $f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo, f derivabile $\forall x \in \mathring{I}$

Se $f'(x)=0 \ \forall x \in I$, allora $f(x) = \text{cost.} \ \forall x \in I$

dim

Tesi: $\forall x, y \in I \quad f(x) = f(y)$

Presi $x, y \in I$, suppongo $x < y$ (non è restrittivo)

(i) $f: [x,y] \to \mathbb{R}$ continua

(ii) $f:]x,y[\to \mathbb{R}$ derivabile

$\Rightarrow$ (Teorema Lagrange) $\exists z \in]x,y[\ : \ f'(z) = \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$

Ma per ipotesi $f'(z)=0 \Rightarrow f(y) = f(x)$

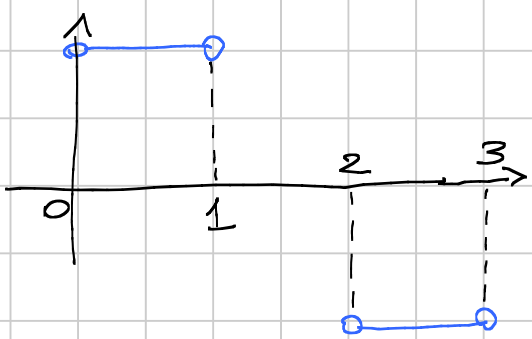
Osservazione: Nella dimostrazione si è fatto uso del fatto che

f derivabile in $\bar{x} \Rightarrow f$ continua in $\bar{x}$

Osservazione: Nel Teorema è essenziale che I sia un intervallo

Controesempio

$f:]0,1[\cup]2,3[\to \mathbb{R}$ così definita



$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in]0,1[\\ -1 & \text{se } x \in]1,2[\end{cases}$$

Questa funzione è derivabile $\forall x \in]0,1[\cup]2,3[$ con derivata nulla, però

f non è costante su $]0,1[\cup]2,3[$

Corollario ($f'>0 \Rightarrow f \nearrow$; $f'<0 \Rightarrow f \searrow$)

Sia $f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo, f derivabile $\forall x \in \mathring{I}$

(a) Se $f'(x) > 0$ $\forall x \in \mathring{I}$ allora f è strettamente crescente su I

(b) Se $f'(x) < 0$ $\forall x \in \mathring{I}$ allora f è strettamente decrescente su I

dim

(a) Tesi: $\forall x, y \in I$ $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$

Presi $x, y \in \mathring{I}$ con $x < y$, la funzione $f: [x, y] \to \mathbb{R}$

(i) f continua $\forall t \in [x, y]$

(ii) f derivabile $\forall t \in]x, y[$

$\Rightarrow$ (Teorema di Lagrange) $\exists z \in]x, y[: f'(z) = \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}$

Ma per ipotesi $f'(z) > 0$

$\Rightarrow$ essendo $y - x > 0$, si ha necessariamente $f(y) - f(x) > 0$

$\Rightarrow f(y) > f(x)$ ovvero f è strett. crescente

(b) è analogo con disuguaglianze rovesciate ⚡

OSSERVAZIONE Questo risultato è FONDAMENTALE per lo studio della monotonia di una funzione poiché permette di ricondurre

- lo studio della monotonia di $f(x)$

a

- lo studio del segno di $f'(x)$

Esercizio: disegnare il grafico di

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$$

dim.

$f(x)$ è un polinomio, dunque $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}$

Vediamo i limiti agli estremi del dominio: $+\infty$ e $-\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^3\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}\right) = -\infty \cdot 1 = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^3\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}\right) = +\infty \cdot 1 = +\infty$$

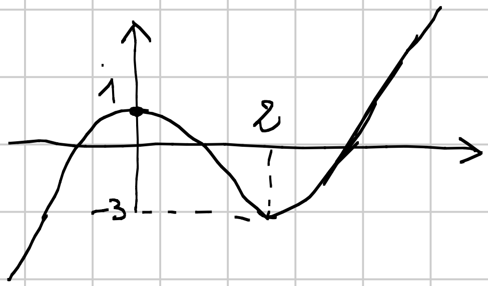
$f(0) = 1$

Studiamo la monotonia $f'(x) = 3x^2 - 6x$
$= 3x(x-2)$

Quindi $f'(x) = 0$ se $x_1 = 0$ $x_2 = 2$

Quindi $f'(x) \begin{cases} > 0 & \text{se } x < 0 \\ < 0 & \text{se } 0 < x < 2 \\ > 0 & \text{se } 2 < x \end{cases}$ da cui segue

che $f(x) \begin{cases} \nearrow & \text{se } x < 0 \\ \searrow & \text{se } 0 < x < 2 \\ \nearrow & \text{se } 2 < x \end{cases}$



Dunque

$x = 0$ punto di max relativo

(e infatti $\exists\, [-1,1] \in \mathcal{J}_0$ t.c. $f(0) = 1 = \max f([-1,1])$)

$x = 2$ punto di minimo relativo

(e infatti $\exists\, [1,3] \in \mathcal{J}_2$ t.c. $f(2) = -3 = \min f([1,3])$)

N.B. Non è chiaro come sia la concavità della funzione f: per questo è necessario conoscere il segno di f'' come vedremo

Def (Punto stazionario di una funzione $f(x)$)

Sia $f: A \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile $\forall x \in A$
Un punto $x_0 \in A$ è detto "punto stazionario per f"
se $f'(x_0) = 0$

Oss: da un punto di vista geometrico, un punto stazionario x_0 corrisponde ad un punto del grafico $(x_0, f(x_0))$ con tangente orizzontale

Oss: x_0 punto di massimo (minimo) locale interno
f derivabile in x_0

$$\Downarrow$$

$$f'(x_0) = 0$$

$$\Downarrow$$

x_0 punto stazionario per f

Oss: x_0 punto stazionario per f

$$\Downarrow$$

1) x_0 punto di minimo locale interno per f
2) " " " massimo " " " "
3) x_0 <u>non è</u> min <u>non è</u> max

Oss: Nel caso 3) la tangente in $(x_0, f(x_0))$ è orizzontale, però non è max
" " min

Esempio $f(x) = x^3$ il punto $x_0 = 0$ è t.c. $f'(0) = 0$

ma questo punto non è né min né max in quanto

$$f(x) = x^3 \begin{cases} < 0 & \text{se } x < 0 \\ > 0 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Studio dei punti stazionari

Teorema (studio dei max e min locali)

$f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo, f derivabile $\forall x \in I$

$x_0 \in \mathring{I}$ punto stazionario per f

1) $\exists \delta > 0$: $f'(x) \begin{cases} >0 \text{ se } x_0-\delta<x<x_0 \\ <0 \text{ se } x_0<x<x_0+\delta \end{cases} \Rightarrow$ x_0 punto di massimo locale interno

$f(x_0) = \max f(]x_0-\delta, x_0+\delta[)$

2) $\exists \delta > 0$: $f'(x) \begin{cases} <0 & x_0-\delta<x<x_0 \\ >0 & x_0<x<x_0+\delta \end{cases} \Rightarrow$ x_0 punto di minimo locale interno

$f(x_0) = \min f(]x_0-\delta, x_0+\delta[)$

3) $\exists \delta > 0$: $f'(x)$ non cambia segno su $]x_0-\delta, x_0+\delta[$ $\Rightarrow$ x_0 non è max locale

" " min "

dim

1) $f'(x) \begin{cases} >0 & x_0-\delta<x<x_0 \\ <0 & x_0<x<x_0+\delta \end{cases} \Rightarrow \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \begin{cases} >0 & -\delta<x-x_0<0 \\ <0 & 0<x-x_0<\delta \end{cases}$

$\Rightarrow \quad f(x)-f(x_0) < 0 \quad \forall x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[\setminus \{x_0\}$

$\Rightarrow$ x_0 punto di max locale interno

2) è analoga a 1), solo con disuguaglianze invertite

3) si suppone $f'(x) > 0 \ \forall x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[\setminus \{x_0\}$

$$\Rightarrow \quad \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0 \quad \forall x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[\setminus \{x_0\}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \begin{cases} >0 & -\delta < x-x_0 < 0 \\ >0 & 0 < x-x_0 < \delta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad f(x)-f(x_0) \begin{cases} <0 & -\delta < x-x_0 < 0 \\ >0 & 0 < x-x_0 < \delta \end{cases}$$

$\Rightarrow$ x_0 non è né minimo né massimo $\not\!\!\!\lightning$

OSSERVAZIONE

$$\left.\begin{array}{l} f''(x_0)>0 \\ + \\ f'(x_0)=0 \end{array}\right. \Rightarrow \frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0} = \frac{f'(x)}{x-x_0} > 0 \quad \forall x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{x-x_0} \begin{cases} >0 & x_0-\delta<x<x_0 \\ >0 & x_0<x<x_0+\delta \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x) \begin{cases} <0 & x_0-\delta<x<x_0 \\ >0 & x_0<x<x_0+\delta \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) \begin{cases} \text{decresce} & x_0-\delta<x<x_0 \\ \text{cresce} & x_0<x<x_0+\delta \end{cases}$$

Analogamente si prova che

$$\begin{cases} f''(x_0)<0 \\ + \\ f'(x_0)=0 \end{cases} \Rightarrow \exists \delta>0 : f(x) \begin{cases} \text{cresce} & x_0-\delta<x<x_0 \\ \text{decresce} & x_0<x<x_0+\delta \end{cases}$$

Ne segue che il Teorema precedente si "risolve"

Teorema (studio dei min e max locali)

$f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo, f derivabile $\forall x \in \mathring{I}$

$x_0 \in \mathring{I}$ punto stazionario per f, $\exists f''(x_0)$

1) $f''(x_0)>0 \Rightarrow x_0$ punto di minimo locale per f

2) $f''(x_0)<0 \Rightarrow x_0$ punto di massimo locale per f

Asintoti

Def (Asintoto verticale)

Data una funzione $f: A \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$, una retta $x = x_0$ viene detta "asintoto verticale" se $\left[\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty (-\infty)\right]$ o $\left[\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty (-\infty)\right]$

Def (Asintoto)

Data una funzione $f:]a, +\infty[\to \mathbb{R}$ (ovvero $f:]-\infty, b[\to \mathbb{R}$), una retta di equazione $y = ax + b$ viene detta "asintoto" per $x \to +\infty$ (ovvero $x \to -\infty$)

se $\lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - ax - b\right) = 0$

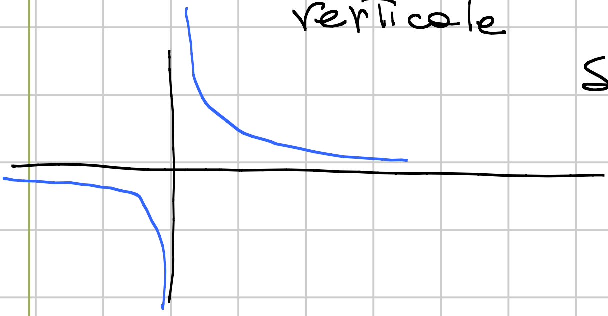
(ovvero $\lim_{x \to -\infty} (f(x) - ax - b) = 0$)

Osservazione: Data $f:]a, +\infty[\to \mathbb{R}$ questa ha $y = ax + b$ come asintoto

$\underline{\text{sse}}$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}$ & $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - ax) = b \in \mathbb{R}$

Esempio: $f(x) = 1/x$ ha $x=0$ come asintoto verticale



Si ha $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

Esempio: $f(x) = 1/x$ ha $y=0$ come asintoto orizzontale

Infatti $\lim_{x \to \pm\infty} 1/x = 0$

Esempio: la funzione $f(x) = x + \frac{3x}{x+1}$

ha $y = x+3$ come asintoto per $x \to \pm\infty$

Infatti $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ $\quad \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - x \right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{3x}{x+1} = 3$$