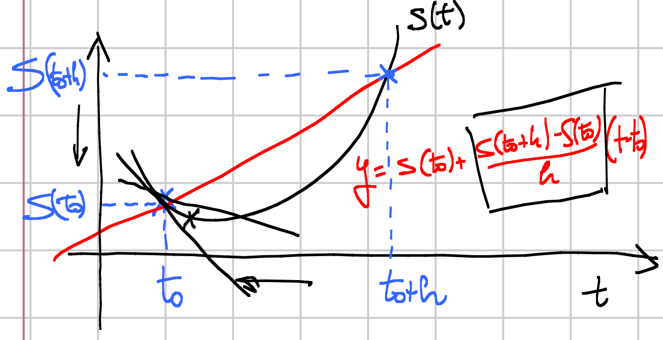
DERIVATA

Se un punto mobile su una retta ha percorso
$s(t_0)$ metri all'istante t_0.
$s(t_0+h)$ " " " t_0+h.



significa che nell'intervallo $[t_0, t_0+h]$ si è mosso con velocità media

$$\boxed{V_\pi} = \frac{s(t_0+h)-s(t_0)}{\cancel{t_0}+h-\cancel{t_0}}$$

Questo numero rappresenta il coefficiente angolare della retta secante il grafico di $s(t)$ nei punti $(t_0, s(t_0))$ e $(t_0+h, s(t_0+h))$ di equazione

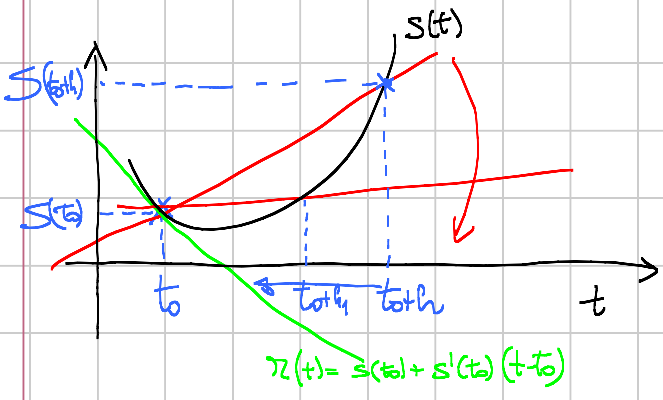
$$y = s(t_0) + \frac{s(t_0+h)-s(t_0)}{h}\cdot(t-t_0)$$

Quando $\boxed{h \to 0}$, i due punti $(t_0, s(t_0))$ e $(t_0+h, s(t_0+h))$ vengono a coincidere e la retta in posizione limite viene detta retta tangente ed ha equazione (se esiste)

$$r(t) = s(t_0) + s'(t_0)\cdot(t-t_0) \quad \text{ove}$$

$$s'(t_0) = \lim_{h\to 0} \frac{s(t_0+h)-s(t_0)}{h}$$

||| Velocità istantanea ??



Def $f: A \to \mathbb{R}$, x_0 p.d.e. per A $x_0 \in A$

Si dice "derivata di f in x_0" e si indica con $f'(x_0)$, $Df(x_0)$ o $\frac{df(x_0)}{dx}$ il valore (se esiste) del $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Quando $f'(x_0) \in \mathbb{R}$, f si dice "derivabile in x_0"

Esempi

1) $y = \operatorname{sen} x$ è derivabile in $x_0 = 0$ e si ha $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 0}{x - 0} = 1$

2) $y = \cos x$ è derivabile in $x_0 = 0$ e si ha $\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - \cos 0}{x - 0} = 0$

infatti $\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - \cos 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} \cdot \frac{x^2}{x} =$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x} = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 0 = 0$$

3) $y = e^x$ è derivabile in $x_0 = 0$ e si ha $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = 1$

Ricorda che $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 0$!

4) $y = x^n$ è derivabile $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ e si ha

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\cancel{(x - x_0)}(x^{n-1} + x^{n-2} x_0 + \dots + x x_0^{n-2} + x_0^{n-1})}{\cancel{x - x_0}}$$

$$= \lim_{x \to x_0} (x^{n-1} + x^{n-2} x_0 + \dots + x \cdot x_0^{n-2} + x_0^{n-1}) = n x_0^{n-1}$$

Ricordiamo $(x^2 - x_0^2) = (x - x_0)(x + x_0)$

$(x^3 - x_0^3) = (x - x_0)(x^2 + x x_0 + x_0^2)$

Retta Tangente al grafico in $(x_0, f(x_0))$

Se f derivabile in x_0 allora $\exists \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) \in \mathbb{R}$

allora $\exists \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{x-x_0} = 0$

allora $f(x) - \left(f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)\right) = o(x-x_0) \quad x\to x_0$

allora $f(x) - r(x) = o(x-x_0) \quad x\to x_0$

Def: Data $f: A\to\mathbb{R}$ $x_0\in A$ p.d.a. per A

la retta $r(x) = m(x-x_0)+q$ viene detta

"retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$"

se $m = f'(x_0)$

$q = f(x_0)$

Esempio la retta tangente al grafico di $f=e^x$ nel punto $(0,e^0)=(0,1)$ è

$$r(x) = 1\cdot(x-0) + 1$$

$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^0}{x}=1$ $\qquad$ $e^0=1$

Problema: Tutte le funzioni sono derivabili? NO!

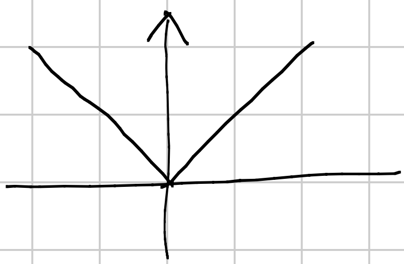
Controesempio (f=|x| non è derivabile in $x_0=0$)

Proviamo che $|x|$ non è derivabile in $x_0=0$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|-|0|}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x} = -1$$

$$\neq$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|-|0|}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x} = 1$$



N.B. di rette tangenti ne trovo ∞ !!

DIFFERENZIABILITÀ

Def $f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ p.d.a. per A

f si dice "differenziabile in x_0"

se $\exists a \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - a(x - x_0)}{|x - x_0|} = 0$$

o equivalentemente

se $\exists a \in \mathbb{R}$ t.c.

$$f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + o(|x - x_0|) \quad \text{per } x \to x_0$$

Il numero $a = df(x_0)$ è detto "differenziale di f in x_0"

Teorema (f differenziabile in x_0 sse f derivabile in x_0)

$f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$, x_0 p.d.a. per A

$\left[f \text{ differenziabile in } x_0 \text{ con } df(x_0) = f'(x_0) \right]$ sse $\left[f \text{ derivabile in } x_0 \text{ con } f'(x_0) = df(x_0) \right]$

dim

$(\Rightarrow)$ f differenziabile $\Rightarrow \exists a \in \mathbb{R}: \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - a(x - x_0)}{|x - x_0|} = 0$

$$\Rightarrow \exists a \in \mathbb{R}: \begin{cases} \lim_{x \to x_0^-} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{-(x - x_0)} + a \right] = 0 \\ \lim_{x \to x_0^+} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - a \right] = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \exists a \in \mathbb{R}: \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a = f'(x_0)$$

$(\Leftarrow)$ f derivabile $\Rightarrow$ f differenziabile

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = 0$$

$$\Rightarrow f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = o(|x - x_0|) \quad x \to x_0$$

$\Rightarrow$ f differenziabile in x_0 $\square$

Oss: Si è utilizzato il fatto che

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{x} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{|x|} = 0$$

Teorema (f derivabile in x_0 $\Rightarrow$ f continua in x_0

$f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ p.d.a. per A   f derivabile in x_0 $\Rightarrow$ f continua in x_0

dim

f derivabile in x_0 $\Rightarrow \exists \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{x-x_0} = 0$$

$$\Rightarrow f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0) = o(x-x_0) \quad x\to x_0$$

$$\Rightarrow f(x)-f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0) \quad x\to x_0$$

$$\Rightarrow f(x)-f(x_0) = o(1) \quad x\to x_0 \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

DERIVATA $= +\infty$ o $-\infty$

Nel caso in cui $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$ $(-\infty)$

la funzione f <u>non è</u> derivabile (differenziabile) in x_0

In tal caso la retta tangente è data da $x = x_0$

<u>Esempio</u> $f(x) = \sqrt[3]{x}$ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{2/3}} = +\infty$$

e dunque la retta tangente al grafico in $(0,0)$

è $x = 0$

Esempio: ① $f(x) = \operatorname{sen} x$ $\quad (0, f(0)) = (0,0)$

$r(x) = x$ è la retta Tangente al grafico di $\operatorname{sen} x$ in $(0,0)$

② $f(x) = e^x$ $\quad (0, f(0)) = (0,1)$

$r(x) = 1 + x$ è la retta Tangente al grafico di e^x in $(0,1)$

<u>Oss</u> la retta Tangente in $(x_0, f(x_0))$ è la retta che meglio approssima $f(x)$ quando $x \to x_0$

Oss Data l'unicità del limite:

- la derivata se esiste è unica
- la retta Tangente " " " "
- il differenziale " " " "

Def $f: A \to \mathbb{R}$ x_0 p.d.a. per A

quando esiste, la "derivata sinistra $f'_-(x_0)$" è

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_-(x_0)$$

quando esiste, la "derivata destra $f'_+(x_0)$" è

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_+(x_0)$$

Teorema: $f: A \to \mathbb{R}$, x_0 p.d.a. per A

- Se $\exists\, f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$ allora $\exists\, f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$
- Se $\exists\, f'(x_0)$, $f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$ allora $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$

<u>Teorema</u> $f, g: A \to \mathbb{R}$, x_0 p.d.a. per A, $x_0 \in A$

- $\exists\, f'(x_0)$
- $g \equiv f$ in un intorno di x_0

$\Rightarrow \exists\, g'(x_0) = f'(x_0)$

Oss la derivabilità, come la continuità, è un concetto locale (o puntuale)
mentre
la monotonia è un concetto globale

Esercizio $f(x) = \operatorname{sen} x \Rightarrow f'(x) = \cos x_0 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$

dim

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x_0}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\operatorname{sen}(x_0 + (x-x_0)) - \operatorname{sen} x_0}{x-x_0}$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{\operatorname{sen} x_0 \cos(x-x_0) + \operatorname{sen}(x-x_0)\cos x_0 - \operatorname{sen} x_0}{x-x_0}$$

$$= \lim_{x\to x_0}\left[\operatorname{sen} x_0 \frac{\cos(x-x_0)-1}{x-x_0} + \cos x_0 \frac{\operatorname{sen}(x-x_0)}{x-x_0}\right]$$

$$= \operatorname{sen} x_0 \lim_{t\to 0}\frac{\cos t - 1}{t} + \cos x_0 \lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen} t}{t} = \cos x_0$$

limite somma = somma limiti

Cambiamento variabile nel limite $t = x - x_0$

Esercizio $f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\operatorname{sen} x_0 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$

dim

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\cos x - \cos x_0}{x-x_0} \qquad \cos x = \cos(x_0 + (x-x_0))$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{\cos x_0 \cos(x-x_0) - \operatorname{sen} x_0 \operatorname{sen}(x-x_0) - \cos x_0}{x-x_0}$$

$$= \lim_{x\to x_0}\left[\cos x_0 \frac{\cos(x-x_0)-1}{x-x_0} - \operatorname{sen} x_0 \frac{\operatorname{sen}(x-x_0)}{x-x_0}\right]$$

$$= \cos x_0 \lim_{t\to 0}\frac{\cos t - 1}{t} - \operatorname{sen} x_0 \lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen} t}{t} = -\operatorname{sen} x_0$$

Esercizio $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x_0) = e^{x_0} \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$

dim

$$\lim_{x\to x_0} \frac{e^x - e^{x_0}}{x-x_0} = e^{x_0} \lim_{x\to x_0} \frac{e^{x-x_0}-1}{x-x_0} = e^{x_0}\cdot \lim_{t\to 0}\frac{e^t - 1}{t} = e^{x_0}$$

Cambio variabile nel limite $t = x - x_0$

Esercizio: $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x_0) = n x_0^{n-1} \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$

dim

fatta in precedenza $\lightning$

In questo modo abbiamo calcolato le derivate delle funzioni elementari

Teoremi Algebrici sulle derivate

Si devono provare i Teoremi delle
- derivata somma e prodotto
- derivata composizione
- derivata dell'inversa

Teorema (derivata della somma)

$f, g : A \to \mathbb{R}$ $\quad x_0 \in A$ p.d.a. per A

Se esistono $f'(x_0)$ e $g'(x_0)$

allora esiste $\quad (f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$ (fatta eccezione per le forme indeterminate $+\infty - \infty$)

dim

Segue dal Teorema sulla somma dei limiti

$$\lim_{x \to x_0} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + g'(x_0)$$

limite somma = somma limiti

$\lightning$

Teorema (derivata prodotto - formula Leibniz)

$f, g : A \to \mathbb{R}$ $\quad x_0 \in A$ p.d.a. per A

Se $\exists f'(x_0)$ e $g'(x_0)$ allora $\exists (f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) g(x_0) + f(x_0) g'(x_0)$

eccettuate le forme indeterminate $0 \cdot \infty$

dim.

$$(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0) = f(x) \cdot g(x) - f(x_0) g(x) + f(x_0) g(x) - f(x_0) g(x_0)$$

e dunque

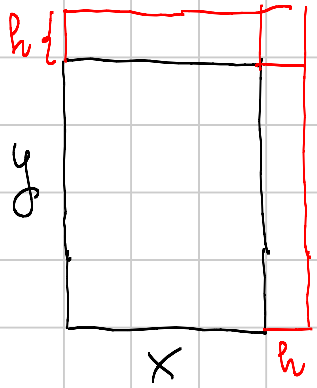
$$(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0) = g(x) \cdot \left(f(x) - f(x_0)\right) + f(x_0) \cdot \left(g(x) - g(x_0)\right)$$

e dunque, utilizzando il Teorema della somma e prodotto dei limiti escluse le forme indeterminate

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(f\cdot g)(x)-(f\cdot g)(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} g(x)\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + f(x_0)\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

$$= g(x_0)\cdot f'(x_0)+f(x_0)\,g'(x_0)$$

Oss (interpretazione euristica della derivata)



Quando i lati del rettangolo incrementano

$x \to x+h$

$y \to y+h$

si ha che

$$A = xy \longrightarrow \tilde{A} = (x+h)(y+h)$$

$$\tilde{A} - A = xh + yh + h^2$$

e quando $h \to 0$ si ha che

$$A-\tilde{A} = h(x+y) + o(h)$$

ovvero

$$\frac{A-\tilde{A}}{h} = (x+y) + \frac{o(h)}{h} \longrightarrow x+y$$

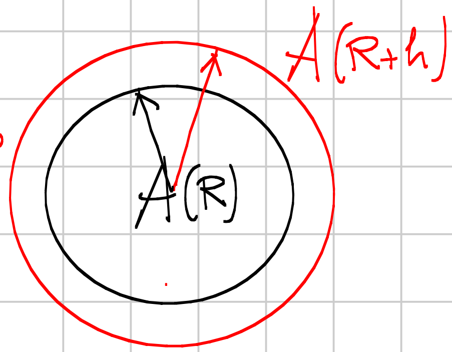
(Quando $x=y$, nel quadrato, si trova $\dfrac{A-\tilde{A}}{h} \xrightarrow[x\to 0]{} 2x$

Esempio

Area cerchio

$$A(R) = \pi R^2$$

$$A(R+h) = \pi (R+h)^2$$



$$\frac{A(R+h)-A(R)}{h} = \pi\,\frac{2Rh+h^2}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} 2\pi R$$

Perimetro Cerchio

Esempio

$V(R) = \frac{4}{3}\pi R^3$ Volume Sfere

$$\frac{dV(R)}{dR} = \frac{4}{3}\pi\left(3R^2\right) = 4\pi R^2 = S(R)$$

Area Superficie Sferica

Adesso serve il Teorema sulla derivata del prodotto di composizione

Nel seguito ci servirà il seguente risultato

Teorema ($f \cdot g \xrightarrow[x\to x_0]{} L \in \mathbb{R}$, $f \xrightarrow[x\to x_0]{} \ell \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \Rightarrow \exists \lim_{x\to x_0} g = \frac{L}{\ell}$)

$f, g : A \to \mathbb{R}$ x_0 p.d.a. per A

Se $\exists \lim_{x\to x_0} (f\cdot g)(x) = L \in \mathbb{R}$ allora $\exists \lim_{x\to x_0} g(x) = \frac{L}{\ell}$

$$\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

Questo risultato segue dal Teorema sul limite del prodotto = prodotto dei limiti (eccezione fatta per le forme indeterminate)

Oss: Una dimostrazione alternativa della formula di Leibniz nel caso di f.ni derivabili

Per ipotesi $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)$ $\quad x \to x_0$

$g(x) = g(x_0) + g'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)$

$\Downarrow$ Tenendo conto delle proprietà di "o"

$$f(x)\cdot g(x) = f(x_0)\,g(x_0) + \left[f(x_0)\,g'(x_0) + f'(x_0)\,g(x_0)\right](x-x_0) + o(x-x_0) \quad (x\to x_0)$$

$\Downarrow$

la derivata di $(f\cdot g)(x)$ nel punto x_0 è

$$(f\cdot g)'(x_0) = f(x_0)\,g'(x_0) + f'(x_0)\,g(x_0)$$

Teorema (derivata della composizione)

$f: A \to \mathbb{R}$ $\quad x_0 \in C = f^{-1}(f(A) \cap B)$ p.d.a. per C

$g: B \to \mathbb{R}$ $\quad y_0 = f(x_0)$

- f derivabile in x_0
- g " " $y_0 = f(x_0)$

Allora $(g \circ f)$ è derivabile in x_0 e si ha $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$

dim.

Per ipotesi $\begin{cases} f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(|x - x_0|) & (x \to x_0) \\ g(y) = g(y_0) + g'(y_0)(y - y_0) + o(|y - y_0|) & (y \to y_0) \end{cases}$

Quando $x \to x_0$ anche $y = f(x) \to y_0 = f(x_0)$

$$\begin{cases} g(f(x)) = g(y_0) + g'(y_0)(f(x) - f(x_0)) + o(|f(x) - f(x_0)|) \\ \text{e} \\ f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(|x - x_0|) \end{cases} \quad \text{per } x \to x_0$$

$$\Downarrow$$

$$g(f(x)) = g(f(x_0)) + g'(f(x_0)) \cdot [f'(x_0)(x - x_0) + o(|x - x_0|)] + o(|f'(x_0) \cdot (x - x_0) + o(|x - x_0|)|) \quad (x \to x_0)$$

$$\Downarrow$$

$$g(f(x)) = g(f(x_0)) + g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)(x - x_0) + o(|x - x_0|) \quad (x \to x_0)$$

Ne segue che $\quad (g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) f'(x_0)$

Dimostrazione alternativa

questo passaggio è illecito: chi garantisce che $x \neq x_0 \Rightarrow f(x) \neq f(x_0)$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Introduco la funzione ausiliaria $\gamma(z)$

$$\gamma(z) = \begin{cases} \dfrac{g(z) - g(y_0)}{z - y_0} & z \neq y_0 \\ g'(y_0) & z = y_0 \end{cases}$$

In tal modo, per $x \neq x_0$ si ha

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \gamma(f(x)) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{g(f(x)) - g(y_0)}{f(x) - y_0} \cdot \dfrac{f(x) - y_0}{x - x_0}, & \text{se } f(x) \neq y_0 \\ g'(y_0) \cdot 0 & , \text{se } f(x) = y_0 \end{cases}$$

Essendo γ continua in y_0, si può cambiare variabile nel limite e porre $y = f(x)$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(y_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \gamma(f(x)) \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

cambio variabile $y = f(x)$

$$= \lim_{y \to y_0} \gamma(y) \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \gamma(y_0) \cdot f'(x_0)$$

$$= g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

Oss: da questi tre risultati (derivata somma, derivata prodotto e derivata della composizione) si possono dedurre il teorema su
- derivata della funzione inversa $f^{-1}(x)$
- derivata della funzione reciproca $1/f(x)$
- derivata del rapporto $f(x)/g(x)$

ma per semplicità li proveremo in modo diretto.

Teorema (derivata della funzione inversa)

$f:]a,b[\to f(]a,b[)$ strettamente monotona

f derivabile in $x_0 \in]a,b[$ e $f'(x_0) \neq 0$

allora f^{-1} è derivabile in $y_0 = f(x_0)$

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)} \quad \text{ovvero} \quad (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

dim

Posto $g(y) = f^{-1}(y)$ $\quad f$ è derivabile in $g(y_0) = f^{-1}(y_0)$ e si ha

$$f(g(y)) - f(g(y_0)) = f'(g(y_0)) \cdot (g(y) - g(y_0)) + o(|g(y) - g(y_0)|) \quad y \to y_0$$

$$\Downarrow$$

$$y - y_0 = f'(g(y_0)) \cdot (g(y) - x_0) + o(|g(y) - x_0|) \quad y \to y_0$$

e dunque

$$o(|y-y_0|) = o\left(f'(g(y_0)) \cdot (g(y) - x_0) + o(|g(y) - x_0|)\right) = o(|g(y) - x_0|)$$

per $y \to y_0$

$$\Downarrow$$

$$y - y_0 = f'(g(y_0)) \cdot (g(y) - x_0) + o(|y - y_0|) \quad \text{per } y \to y_0$$

$$\Downarrow$$

$$y - y_0 + o(|y-y_0|) = f'(x_0) \cdot (g(y) - x_0) \quad \text{per } y \to y_0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{f'(x_0)}(y - y_0) + o(|y-y_0|) = g(y) - g(y_0) \quad y \to y_0$$

$$\Downarrow$$

$$g(y) = g(y_0) + \frac{1}{f'(x_0)} \cdot (y - y_0) + o(|y-y_0|) \quad y \to y_0$$

da cui segue che $\quad g'(f(x_0)) = (f^{-1})'(f(x_0)) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$

Dimostrazione alternativa

Essendo f strettamente monotona $\Rightarrow f^{-1}$ è strettamente monotona

Posto $g = f^{-1}$ si ha $(f \circ g)(y) = y$

$$1 = (f \circ g)'(y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(g(y)) - f(g(y_0))}{y - y_0}$$

$g = f^{-1}$ è strett. monotona per cui $y \neq y_0 \Rightarrow g(y) \neq g(y_0)$

$$= \lim_{y \to y_0} \frac{f(g(y)) - f(g(y_0))}{g(y) - g(y_0)} \cdot \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0}$$

g è continua e dunque cambio variabile $x = g(y)$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{y \to y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0}$$

$$= f'(x_0) \cdot \lim_{y \to y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0}$$

Da cui segue $g'(y_0) = \lim_{y \to y_0} \dfrac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \dfrac{1}{f'(x_0)}$

N.B. si è utilizzato il seguente risultato

Se esiste $\lim_{y \to y_0} R_g(y) R_f(x) \in \mathbb{R}$ ed $\exists \lim_{x \to x_0} R_f(x) = f'(x_0) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

allora esiste pure $\lim_{y \to y_0} R_g(y) = g'(y_0)$

Teorema (derivata di $1/f$)

$f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ p.d.a per A

Se esiste $f'(x_0)$ e $f(x_0) \neq 0$ allora $\exists \left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{f^2(x_0)}$

dim

Dalla definizione

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1/f(x) - 1/f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \left[-\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right] \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x) f(x_0)} = -\frac{f'(x_0)}{f^2(x_0)}$$

limite di un prodotto = prodotto limiti

$\not{y}$

Esercizio (derivata del quoziente)

$f, g: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ p.d.a per A, f, g derivabili con $g(x_0) \neq 0$.

Allora $\exists \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) g(x_0) - f(x_0) g'(x_0)}{g^2(x_0)}$

dim

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(x_0) = f'(x_0) \cdot \frac{1}{g(x_0)} + f(x_0) \cdot \left(\frac{1}{g}\right)'(x_0)$$

derivata prodotto

regola Leibniz

$\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{f^2(x_0)}$

$$= \frac{f'(x_0)}{g(x_0)} + f(x_0) \cdot \left(-\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}\right) = \frac{f'(x_0) g(x_0) - f(x_0) g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

$\not{y}$

Esercizio Data $f(x) = x^8$, calcolare f' in 3 modi $\neq$

- $f(x) = x^8 \Rightarrow f'(x) = 8x^7$ in modo diretto

- $f(x) = x^3 \cdot x^5 = g(x) \cdot h(x)$ $\quad g(x) = x^3 \quad h(x) = x^5$

$$f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) h'(x) = 3x^2 \cdot x^5 + x^3 \cdot 5x^4$$
$$= 8x^7$$

$- \; f(x) = (h \circ g)(x)$ $\qquad g(x) = x^4 \quad g' = 4x^3$

$\qquad h(y) = y^2 \quad h' = 2y$

$$f'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x) = 2(x^4) \cdot 4x^3 = 8x^7$$

Esercizio $f(x) = \operatorname{Tg} x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{Tg}^2 x$

$$\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)' = \frac{(\operatorname{sen} x)' \cos x - \operatorname{sen} x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{Tg}^2 x$$

Esercizio $f(x) = e^x \Longrightarrow (f^{-1})'(y) = 1/y$

$f^{-1}(y) = \log y$

$f = e^x$ è monotona

è derivabile

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{e^{f^{-1}(y)}} = \frac{1}{e^{\log y}} = \frac{1}{y}$$

Esempio $f(x) = \operatorname{Tg} x \Longrightarrow (f^{-1})'(y) = \frac{1}{1+y^2}$

$f^{-1}(y) = \operatorname{arcTg} y$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{1 + \operatorname{Tg}^2(f^{-1}(y))} =$$

$$= \frac{1}{1 + [\operatorname{Tg}(\operatorname{arcTg} y)]^2} = \frac{1}{1+y^2}$$

Esercizio $f(x) = \operatorname{sen}\left(\cos\left(1+x^2\right)\right)$

calcolare f'

$f(x) = \left(l \circ h \circ g\right)(x)$ $\qquad x \xrightarrow{g} 1+x^2 \xrightarrow{h} \cos(1+x^2) \xrightarrow{l} \operatorname{sen}(\ )$

$g = 1+x^2 \quad g' = 2x$

$h(y) = \cos y \quad h'(y) = -\operatorname{sen} y$

$l(z) = \operatorname{sen} z \quad l'(z) = \cos z$

$$f'(x) = l'\left(\left(h \circ g\right)(x)\right) \cdot h'\left(g(x)\right) \cdot g'(x)$$

$$= \cos\left(\cos(1+x^2)\right) \cdot \left(-\operatorname{sen}(1+x^2)\right) \cdot 2x$$

$$= -2x \cdot \cos\left(\cos(1+x^2)\right) \cdot \operatorname{sen}\left(1+x^2\right)$$