Lezione 29 - Analisi Matematica 1 - 21 novembre 2013

Abbiamo fatto

Def. Serie numerica $\sum_n a_n \equiv$ successione ridotte $\left\{\sum_{k=0}^{n} a_k\right\}_n$

Condizione necessaria ($\sum_n a_n$ converge $\Rightarrow a_n \xrightarrow[n]{} 0$)

Condizione necessaria e sufficiente di Cauchy

Serie geometrica $\sum_n q^n$ $\begin{cases} \text{converge } 1/(1-q) & |q|<1 \\ \text{diverge a } +\infty & q \geq 1 \\ \text{indeterminata} & q \leq -1 \end{cases}$

Serie armonica generalizzata $\sum_n 1/n^\alpha$ $\begin{cases} \text{converge} & \alpha > 1 \\ \text{diverge } +\infty & \alpha \leq 1 \end{cases}$

Serie a termini positivi: $\sum_n a_n \quad a_n \geq 0$

Serie a termini positivi $\Rightarrow \{S_n\}_n = \left\{\sum_{k=0}^{n} a_k\right\}_n$ è debolmente crescente

$\Rightarrow$ o converge o diverge

Criterio del confronto tra serie a termini positivi

" " " asintotico

" della radice n-esima:

$\sqrt[n]{a_n} \longrightarrow \ell \begin{cases} >1 & \text{la serie diverge} \\ <1 & \text{" " converge} \end{cases}$

" del rapporto

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \longrightarrow \ell \begin{cases} >1 & \text{la serie diverge} \\ <1 & \text{" " converge} \end{cases}$

Il caso $\ell = 1$ è indecidibile!!

OSSERVAZIONE (il caso $\ell=1$ è indecidibile)

Quando $\sqrt[n]{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, non si può concludere nulla. Infatti

$\sum_n 1/n$ diverge a $+\infty$ e $\sqrt[n]{1/n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

$\left(\frac{1/(n+1)}{1/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \right)$

$\sum_n 1/n^2$ converge e $\sqrt[n]{1/n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

$\left(\frac{1/(n+1)^2}{1/n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \right)$

Esercizio: $q>0$ $\quad a_n = \sum_{k=1}^{n} q^k$

a) Calcolare a_n esplicitamente e
" $\lim_{n\to+\infty} a_n$

b) Studiare, al variare di $q>0$, la convergenza di $\sum_n (q \cdot a_n)^n$

dim

a) $q=1$ $\quad a_n = \sum_{k=1}^{n} 1 = n$

$q \neq 1$ $\quad a_n = \sum_{k=1}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} - 1 = q\,\frac{1-q^n}{1-q}$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \begin{cases} +\infty & q>1 \\ +\infty & q=1 \\ \frac{q}{1-q} & 0<q<1 \end{cases}$$

b) $\sum_n (q a_n)^n$ $\quad \boxed{b_n = (q a_n)^n} > 0$ (è a termini positivi)

$$\sqrt[n]{b_n} = q \cdot a_n = \begin{cases} n & q=1 \\ q^2\,\frac{1-q^n}{1-q} & q\neq 1 \end{cases}$$

$$\lim_n \sqrt[n]{b_n} = \begin{cases} +\infty & q \geq 1 \\ q^2/1-q & 0<q<1 \end{cases}$$ $\Rightarrow$ $q \geq 1$ la serie diverge a $+\infty$

Se $q \geq 1$ allora la serie diverge

Se $0<q<1$ allora la serie converge $\frac{q^2}{1-q}<1$

" " diverge $\frac{q^2}{1-q}>1$

$$\frac{q^2}{1-q}=1 \text{ se } q^2+q-1=0 \text{ se } q_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

• $0<q<1$ e $0<q<\frac{-1+\sqrt{5}}{2}<1 \Rightarrow 0\leq\frac{q^2}{1-q}<1$

$\Rightarrow \sum_n (q\cdot a_n)^n$ converge

• Se $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}<q<1$ allora $1<\frac{q^2}{1-q}$

allora $\sum_n (q\, a_n)^n$ diverge

• Se $q=\bar{q}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ allora $\frac{\bar{q}^2}{1-\bar{q}}=1$ e dunque

non si applica il criterio della radice

se $q=\bar{q}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\in\,]0,1[$ allora $b_n=\left(\bar{q}^2\,\frac{1-\bar{q}^n}{1-\bar{q}}\right)^n=\left(1-\bar{q}^n\right)^n \underset{\text{Bernoulli}}{\geq} 1-n\bar{q}^n$

(la disug. Bernoulli si applica poichè, per $n\geq n_0$, $0<\bar{q}^n<1$
e dunque $1-\bar{q}^n>0$!!!)

dunque $b_n \geq 1-n(\bar{q})^n$ ma $\lim_{n\to+\infty} n\bar{q}^n=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\left(\frac{1}{\bar{q}}\right)^n}=0$

in quanto $n\bar{q}^n=e^{\log n+n\log\bar{q}}=e^{n\left(\log\bar{q}+\frac{\log n}{n}\right)}$ e

$n\left(\log\bar{q}+\frac{\log n}{n}\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty\cdot\log\bar{q}=-\infty$ poichè $\bar{q}<1$

Dunque per il Teorema Confronto Successioni $\lim_{n\to+\infty} b_n\geq 1$

$\Rightarrow \lim_n b_n\neq 0 \Rightarrow$ (cond. necessaria convergenza)

$\sum_n b_n$ diverge a $+\infty$

(è a termini positivi)

Serie a Termini segno ∀: Convergenza Assoluta

Def (Convergenza Assoluta)

Data $\sum_n a_n$ una serie a termini segno ∀, questa si dice "assolutamente convergente" se $\sum_n |a_n|$ converge

Oss: $\sum_n a_n$ a termini positivi allora convergenza $\Leftrightarrow$ convergenza assoluta

Teorema (Convergenza Assoluta ⇒ Convergenza)

Se $\sum_n |a_n|$ converge allora $\sum_n a_n$ converge

dim

Per ipotesi $\forall \varepsilon>0\ \exists \bar{n}>0 : \forall n>0\ \forall k\in\mathbb{N}\quad \big||a_{n+k}|+\dots+|a_n|\big|<\varepsilon$

" " " " $|a_{n+k}|+\dots+|a_n|<\varepsilon$.

inoltre

$$|a_{n+k}+\dots+a_n| \leq |a_{n+k}|+\dots+|a_n|$$

da cui segue la Tesi

$\forall\varepsilon>0\ \exists\bar{n}>0 : \forall n>\bar{n}\ \forall k\in\mathbb{N}\quad |a_{n+k}+a_{n+k-1}+\dots+a_n|<\varepsilon$

Esercizio: Studiare la convergenza della serie

$$\sum_n \operatorname{sen} n \cdot \frac{\log n}{n^\alpha}$$

al variare del parametro $\alpha>0$

dim

Questa serie non è a termini positivi, e quindi studiamo

$$|a_n| = |\operatorname{sen} n| \cdot \frac{\log n}{n^\alpha} \qquad \forall n\geq 1 \qquad \alpha>0$$

ovvero la convergenza assoluta

$0\leq|\operatorname{sen} n|<1$. Devo trovare una serie con cui confrontarla, a_n tende a zero per $n \to +\infty$ un poco più lentamente di $1/n^\alpha$, infatti:

$$\lim_n |a_n| \cdot \frac{1}{1/n^\alpha} \neq 0 \quad \left(\text{non esiste: } \nexists \lim_n \operatorname{sen} n\right)$$

Preso $\alpha > 1$ $\quad$ 1 $\quad$ α $\quad$, confronto la mia serie con $\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1+\alpha}{2}}$ (osserva che $1 < \frac{1+\alpha}{2}$!!)

$$\lim_n \frac{|a_n|}{\left(1/n\right)^{\frac{1+\alpha}{2}}} = \lim_n |\operatorname{sen} n| \log n \left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha - \frac{1+\alpha}{2}}$$

$$= \lim_n |\operatorname{sen} n| \log n \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{\alpha-1}{2}} \qquad \text{e } \frac{\alpha-1}{2} > 0, \forall \alpha > 1$$

Ma $\displaystyle \lim_n \frac{\log n}{(n)^{\frac{\alpha-1}{2}}} = 0 \quad \forall \alpha > 1$

$$\begin{cases} \text{e dunque } \displaystyle\lim_n \frac{|a_n|}{\left(1/n\right)^{\frac{\alpha+1}{2}}} = 0 \quad \forall \alpha > 1 \\ \displaystyle\sum_n^{+} \left(1/n\right)^{\frac{\alpha+1}{2}} \text{ converge, essendo } \frac{\alpha+1}{2} > 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_n |\operatorname{sen} n| \frac{\log n}{n^\alpha} \text{ è convergente } \forall \alpha > 1$$

Quando $\alpha \leq 1$ non posso ottenere la stima precedente e quindi non procedo oltre

Nel caso $0 < \alpha \leq 1$ si prova che la serie converge come segue

(non sono procedimenti sviluppati nel corso!)

Aperta Parentesi

$$\sum_n \operatorname{sen} n \frac{\log n}{n^\alpha} \text{ converge } \forall \alpha \in]0,1]$$

infatti

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen} k = \frac{1}{2i} \sum_{k=1}^{n} \left(e^{ik} - e^{-ik}\right) = \frac{1}{2i} \sum_{k=1}^{n} \left(e^{i}\right)^k - \frac{1}{2i} \sum_{k=1}^{n} \left(e^{-i}\right)^k$$

$$= \frac{1}{2i} \frac{e^{i} - e^{i(n+1)}}{1-e^{i}} - \frac{1}{2i} \frac{e^{-i} - e^{-i(n+1)}}{1-e^{-i}} =$$

$$= \frac{1}{2i}\left(e^{i} - e^{i(n+1)} \cancel{-1} + e^{in} - e^{-i} + e^{-i(n+1)} \cancel{+1} - e^{-in}\right)$$

$$= \frac{1}{2i}\left(\left(e^{i} - e^{-i}\right) - \left(e^{i(n+1)} - e^{-i(n+1)}\right) + \left(e^{in} - e^{-in}\right)\right) =$$

$$= \operatorname{sen} 1 + \operatorname{sen} n - \operatorname{sen}(n+1) = A_n \qquad \{A_n\}_n \text{ è limitata } \forall n$$

$$\sum_n \operatorname{sen} n \cdot \frac{\log n}{n^\alpha} = \sum_n a_n \cdot b_n$$

$\operatorname{sen} n = a_n$, $\frac{\log n}{n^\alpha} = b_n$

tali che • $\{A_n\}_n = \{\operatorname{sen} 1 + \operatorname{sen} n - \operatorname{sen}(n+1)\}_n$ è una successione limitata

• $\frac{\log n}{n^\alpha} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \quad \forall \alpha > 0$

• $\frac{\log n}{n^\alpha}$ è decrescente $\forall \alpha > 0 \quad \forall n \geq n_0$

$$\Rightarrow \sum_n \operatorname{sen} n \cdot \frac{\log n}{n^\alpha} \text{ converge } \forall \alpha \in]0,1]$$

(non assolutamente!) Chiara Tarantasi

Convergenza (semplice) $\not\Rightarrow$ Convergenza Assoluta

Controesempio $\left(\sum_n \frac{(-1)^n}{n} \text{ converge ma } \sum_n \frac{1}{n} \text{ diverge}\right)$

La serie numerica $\sum_n \frac{(-1)^n}{n}$ converge per il criterio di Leibniz(*), ma non converge assolutamente in quanto

$$\sum_n \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum_n \frac{1}{n}$$

e la serie armonica $(\alpha = 1)$ diverge a $+\infty$

(*) Il criterio di Leibniz verrà provato tra poco in questa dispensa

Serie a termini di segno alterno

Il modello che si dovrebbe avere in mente è il seguente

$$\sum_n \frac{(-1)^n}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

$$\begin{array}{lcl}
S_0 = 1 & > & S_1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\
\vee & & \wedge \\
S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} & > & S_3 = \frac{5}{6} - \frac{1}{4} = \frac{7}{12} \\
\vee & & \wedge \\
S_4 = \frac{7}{12} + \frac{1}{5} = \frac{47}{60} & > & S_5 = \frac{47}{60} - \frac{1}{6} = \frac{37}{60} \\
\vee & & \wedge
\end{array}$$

Sembra che $\{S_{2n}\}_n$ sia strettamente decrescente

$\{S_{2n+1}\}_n$ " " crescente

e $\forall n$

$$S_{2n+2} = \sum_{k=0}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{k+1} = S_{2n+1} + \frac{1}{2k+2} > S_{2n+1}$$

Se si prova che $\exists \lim_n S_{2n} = \lim_n S_{2n+1} = \ell \in \mathbb{R}$,

essendo $\{S_{2n}\}_n \cup \{S_{2n+1}\}_n = \{S_n\}$, allora $\exists \lim_n S_n = \ell$

Questo è quanto va provato.

È conveniente fare questa dimostrazione per una serie più generale

$$\sum_n (-1)^n a_n$$

dove

$a_n \geq 0 \quad \forall n$

$a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n$

$\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$

Con queste ipotesi si prova la convergenza (semplice, non assoluta) della serie $\sum_n (-1)^n a_n$

Def (Serie a termini di segno alterno)

Una serie numerica $\sum_n b_n$ si dice "serie a termini di segno alterno" se $b_n \cdot b_{n+1} \leq 0 \ \forall n$

Teorema (Criterio di Leibniz)

Data la serie numerica $\sum_n (-1)^n a_n$

Se $\boxed{\begin{array}{l} (i)\ a_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \\ (ii)\ a_n \geq a_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N} \\ (iii)\ \lim_{n \to +\infty} a_n = 0 \end{array}}$ allora $\boxed{\sum_n (-1)^n a_n \text{ è convergente}}$

dim

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \qquad \{S_n\}_n = \{S_{2n}\}_n \cup \{S_{2n+1}\}_n$$

(a) $\begin{cases} S_0 = a_0 \geq a_0 - \overset{\overset{0}{\wedge}}{\boxed{(a_1 - a_2)}} = S_2 \\ S_{2n} \geq S_{2n} - \underset{\underset{0}{\vee}}{\boxed{(a_{2n+1} - a_{2n+2})}} = S_{2n+2} \end{cases} \Rightarrow \{S_{2n}\}_n$ è debolmente DECRESCENTE

(b) $\begin{cases} S_1 = a_0 - a_1 \leq S_1 + \overset{\overset{0}{\wedge}}{\boxed{(a_2 - a_1)}} = S_3 \\ S_{2n-1} \leq S_{2n-1} + \underset{\underset{0}{\vee}}{\boxed{(a_{2n} - a_{2n+1})}} = S_{2n+1} \end{cases} \Rightarrow \{S_{2n+1}\}_n$ è debolmente CRESCENTE

(c) $S_{2n+1} = S_{2n} - a_{2n+1} \leq S_{2n} \ \forall n$

$$\Rightarrow S_1 \overset{(b)}{\leq} S_{2n+1} \overset{(c)}{\leq} S_{2n} \overset{(a)}{\leq} S_0 \ \forall n \quad \text{da cui segue}$$

$\{S_{2n}\}_n$ crescente e limitata $\Rightarrow \exists \lim_{n \to +\infty} S_{2n} = l_p \in [S_1, S_0]$

$\{S_{2n+1}\}_n$ decrescente e " $\Rightarrow \exists \lim_{n \to +\infty} S_{2n+1} = l_d \in [S_1, S_0]$

Ma $l_p - l_d = \lim_n S_{2n+2} - \lim_n S_{2n+1} = \lim_n (S_{2n+2} - S_{2n+1}) = \lim_n a_{2n+2} \overset{\text{x la (iii)}}{=} 0$

limite somma = somma limiti

Ne segue che $\lim_n S_{2n} = \lim_n S_{2n+1} = l$, ed essendo

$$\{S_n\}_n = \{S_{2n}\}_n \cup \{S_{2n+1}\}_n \overset{\text{Teorema "riempimento" successioni}}{\Longrightarrow} \exists \lim_n S_n = l$$

OSS: La dim. del Teorema precedente permette di valutare quale sia l'errore commesso quando, in luogo di S, si considera la ridotta S_n.

Prendiamo in esame la serie $\sum_n \frac{(-1)^n}{n+1}$ e le sue ridotte parziali $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \frac{1}{k+1}$.

Problema: Che errore commetto prendendo S_8 in luogo di S?

Dalla dimostrazione si ottiene

$$S_1 \leq \lim_n S_n = S \leq S_0$$

ma si ha di meglio

$$S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Ne segue che

$$S_{2n+1} - S_{2n} \leq S - S_{2n} \leq 0 \qquad \text{ma } S_{2n+1} = S_{2n} - a_{2n+1}$$

ovvero

$$-a_{2n+1} \leq S - S_{2n} \leq 0$$

nel caso in esame

Dunque $\quad |S - S_{2n}| \leq |a_{2n+1}| = \frac{1}{2n+1}$

Perciò $\quad |S - S_8| \leq \frac{1}{9}$.

Analogamente: Che errore commetto se prendo S_{11} in luogo di S?

$$S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n} \quad \forall n \Rightarrow 0 \leq S - S_{2n+1} \leq S_{2n} - S_{2n+1} \quad \forall n$$

$$\Rightarrow |S - S_{2n+1}| \leq a_{2n+1} \quad \forall n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| S - \sum_{k=1}^{11} \frac{(-1)^k}{k} \right| \leq a_{11} = \frac{1}{12}$$

In generale vale il seguente risultato

Teorema (stima dell'errore $|S - S_n|$ per una serie a termini segno alterno che soddisfa il criterio Leibniz)

Data $\sum_n (-1)^n a_n$ dove

(i) $a_n \geq 0$; (ii) a_n debolmente decrescente; (iii) $\lim_n a_n = 0$

$\Longrightarrow$ la serie è convergente alla somma $S \in \mathbb{R}$, e si ha

$$|S - S_n| \leq \begin{cases} a_n & \text{se } n \text{ è dispari} \\ a_{n+1} & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases}$$

(la dimostrazione segue dall'esempio precedente)