Lezione 28 - Analisi Matematica 1 - 19 novembre 2013

Serie Numeriche

$$\sum_{n\geq 0}(-1)^n = \overset{0}{(1-1)}+\overset{0}{(1-1)}+\overset{0}{(1-1)}+\cdots\cdots = 0$$

$$\neq\ ??$$

$$= 1\overset{0}{(-1+1)}\overset{0}{(-1+1)}\overset{0}{(-1+1)}\cdots\cdots = 1$$

Il problema è che, sommando ∞ termini,

NON VALE LA PROPRIETÀ ASSOCIATIVA

ovvero dati per esempio tre numeri

$15+4+23=42$

ci sono $3!=6$ modi diversi per farne la somma

Il procedimento convenuto per sommare ∞ termini

$$a_0+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$$

$$a_0 \longrightarrow (a_0+a_1) \longrightarrow (a_0+a_1)+a_2 \quad \text{etc}$$

Def (Serie numerica di termine generale a_n)

Diciamo "serie di termine generale a_n" e la indichiamo con $\sum_n a_n$

la successione $\{S_n\}_n$ ove $S_n=\sum_{k=0}^{n} a_k$

S_n si dice "ridotta (somma) parziale n-esima"

somma serie

$\sum_n a_n$ si dice "convergente" se $\exists \lim_n S_n = S = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \in \mathbb{R}$

" " " "divergente" se $\exists \lim_n S_n = +\infty\ (-\infty)$

" " " "indeterminata" se $\nexists \lim_n S_n$

Il numero $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = S \in \mathbb{R}$

viene detto "somma della serie"

OSS: Non confondere la serie $\sum_n a_n = \{S_n\}_n$ (che è una successione) con $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = S$ (che è un numero di $\mathbb{R}$) che il limite della successione

Ricordando $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ se $\lim_{n\to+\infty} |a_n| = 0$

dunque $\left[\lim_n |q|^n = 0 \text{ se } |q|<1\right] \Longleftrightarrow \left[\lim_n q^n = 0 \text{ se } |q|<1\right]$

La serie geometrica $\sum_n q^n$

Considerate $S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = 1+q+q^2+\dots+q^n$ si ha

$$S_n(1-q) = (1+q+q^2+\dots+q^{n-1}+q^n)(1-q) = 1+\cancel{q}+\cancel{q^2}+\dots+\cancel{q^{n-1}}+\cancel{q^n}+$$
$$-\cancel{q}-\cancel{q^2}+\dots-\cancel{q^{n-1}}-\cancel{q^n}-q^{n+1}$$
$$= 1-q^{n+1}$$

$\Rightarrow$ (se $q\neq 1$) $S_n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Quindi $S_n = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{se } q\neq 1 \\ n+1 & \text{se } q=1 \end{cases}$ da cui segue

$$\lim_n S_n = \begin{cases} +\infty, & \text{se } q \geq 1 \\ \dfrac{1}{1-q}, & \text{se } -1<q<1 \\ \text{non esiste}, & \text{se } q\leq -1 \end{cases}$$

ovvero $\sum_n q^n \begin{cases} \text{diverge a } +\infty, & \text{se } q\geq 1 \\ \text{ha somma } \dfrac{1}{1-q}, & \text{se } |q|<1 \\ \text{non converge}, & \text{se } q\leq -1 \end{cases}$

Infatti, $q>1 \Rightarrow \lim_n S_n = \dfrac{1-\lim_n(q^n)}{1-q} = \dfrac{\lim_n(q^n)-1}{q-1} = \dfrac{+\infty-1}{q-1} = +\infty$

$q=1 \Rightarrow \lim_n S_n = \lim_n (n+1) = +\infty$

$-1<q<1 \Rightarrow \lim_n S_n = \dfrac{1-\lim_n q^n}{1-q} = \dfrac{1-0}{1-q} = \dfrac{1}{1-q}$

$q=-1 \Rightarrow \lim_n S_n = \dfrac{1-\lim_n(-1)^n}{2}$ e questo limite $\nexists$

$q<-1 \Rightarrow \lim_n S_n = \dfrac{1-\lim_n q^n}{1-q}$ " " " "

Serie armonica generalizzata $\boxed{\sum_n 1/n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

La serie $\sum_n 1/n^\alpha$ $\begin{cases} \text{converge se } \alpha > 1 \\ \text{diverge a } +\infty \text{ se } \alpha \leq 1 \end{cases}$

(La dimostrazione si farà in seguito)

Esempio (la serie di Mengoli)

Si consideri $\sum_n \frac{1}{n(n+1)}$ $\qquad a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

La ridotta n-esima $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad S_n = \left(1 - \cancel{\tfrac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{2}} - \cancel{\tfrac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{3}} - \cancel{\tfrac{1}{4}}\right) + \cdots + \left(\cancel{\tfrac{1}{n-1}} - \cancel{\tfrac{1}{n}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{n}} - \tfrac{1}{n+1}\right)$$

$$\Rightarrow \quad S_n = 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$

Esercizio

Calcolare (se esiste) la somma della serie $\sum_{n \geq 10} \frac{3}{(n+2)(n+3)}$

dim

$$a_n = \frac{3}{n+2} - \frac{3}{n+3} \quad \Rightarrow S_n = \sum_{k=10}^{n} a_k = \frac{3}{12} - \frac{3}{n+3}$$

$$\Rightarrow S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} S = \sum_{k=10}^{+\infty} a_k = \frac{3}{12}$$

Esercizio

Calcolare (se esiste) la somma della serie $\sum_{n \geq 2} \left(\frac{1}{2}\right)^n$

dim

$\sum_{n \geq 2} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ è una serie geometrica di ragione $\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ è convergente poiché $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$

$$S = \sum_{k=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k - \left(\frac{1}{2}\right)^0 - \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Teorema (Condizione Necessaria)

Se $\sum_n a_n$ è convergente, allora $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

dim

Per ipotesi $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \overset{\substack{\text{somma della serie}\\ \downarrow}}{S} \in \mathbb{R}$ (la serie converge a S)

(e dunque anche $S_{n-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} S$) si ha che

$$0 = \overset{S}{\lim_n S_n} - \overset{S}{\lim_n S_{n-1}} \overset{\text{limite somma = somma limiti}}{=} \lim_n (S_n - S_{n-1}) =$$

$$= \lim_n \left(\sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \right) = \lim_n a_n$$

ovvero $\lim_n a_n = 0$ ↯

Oss: questo risultato è molto utile per provare che una serie non è convergente, infatti se $\lim_n a_n \neq 0$ allora $\sum_n a_n$ non converge.

Esempio: Studiare la convergenza di $\sum_n \frac{n}{n+1}$

dim

$$a_n = \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \neq 0$$

$\Rightarrow \sum_n a_n$ non converge ↯

Oss: Essendo $\sum_n \frac{n}{n+1}$ a termini positivi e $n/_{n+1} \to 1 \neq 0 \Rightarrow \sum_n a_n$ diverge a $+\infty$.

Teorema (Condizione Necessaria e Sufficiente di Cauchy)

Data una serie numerica $\sum_n a_n$, sono tra loro equivalenti

(i) $\sum_n a_n$ converge

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \bar{n} > 0 \; \forall n > \bar{n} \; \forall k \in \mathbb{N} \quad |\overbrace{a_{n+k} + a_{n+k-1} + \dots + a_{n+1}}^{S_{n+k} - S_n}| < \varepsilon$

Esercizio Provare che $\sum_{n \geq 1} 1/n$ non converge (fatto il 18/11/2013)

Oss: La condizione necessaria di convergenza non si può invertire, ovvero

$$a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \not\Rightarrow \sum_n a_n \text{ convergente}$$

Esempio (Controesempio)

Data la serie $\sum_n 1/n$, si ha che

- $1/n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$
- $\sum_n 1/n$ non converge (in quanto $\{S_n\}_n = \{\sum_{k=1}^{n} 1/k\}_n$ non è di Cauchy)

Serie a Termini positivi

Def (Serie a Termini positivi)

Una serie $\sum_n a_n$ si dice "a Termini positivi"

se $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Le serie a Termini positivi convergono o divergono a $+\infty$

Infatti $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ ridotta n-esima

$$S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} a_k = \sum_{k=0}^{n} a_k + a_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n$$

ovvero $\{S_n\}_n$ è debolmente crescente

Ma allora $\exists \lim_{n \to +\infty} S_n = \sup\{S_n : n \in \mathbb{N}\}$

Ma allora $\{S_n\}_n$ converge o diverge a $+\infty$

Teorema (Criterio del confronto)

Date $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$ a termini positivi, cioè $a_n \geq 0$ $b_n \geq 0$,

tali che $a_k \leq b_k$ $\forall k \geq n_0$

1) $\sum_n a_n$ diverge $\Rightarrow$ $\sum_n b_n$ diverge

2) $\sum_n b_n$ converge $\Rightarrow$ $\sum_n a_n$ converge

dim

1) $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ $\quad B_k = \sum_{k=0}^{n} b_k$. Comunque si prenda $n > n_0$

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n_0} a_k + \sum_{k=n_0+1}^{n} a_k = A_{n_0} + \sum_{k=n_0+1}^{n} a_k$$

$a_k \leq b_k$ $\forall k > n_0$

$$\leq A_{n_0} + \sum_{k=n_0+1}^{n} b_k = A_{n_0} + \left(\sum_{k=0}^{n} b_k - \sum_{k=0}^{n_0} b_k\right)$$

$$= (A_{n_0} - B_{n_0}) + B_n$$

$$\Downarrow$$

$$A_n \leq (A_{n_0} - B_{n_0}) + B_n \qquad \forall n > n_0$$

1) Se $\sum_n a_n$ diverge allora $\exists \lim_n A_n = +\infty$ allora $\exists \lim_n B_n = +\infty$ allora $\sum_n b_n$ diverge

2) Se $\sum_n b_n$ converge allora $\exists \lim_{n \to +\infty} B_n = l < +\infty$

allora $\lim_{n \to +\infty} A_n \leq l + (A_{n_0} - B_{n_0})$ allora

$\lim_{n \to +\infty} A_n = m \in \mathbb{R}$ allora $\sum_n a_n$ converge

N.B. $\{A_n\}_n$ e $\{B_n\}_n$ sono crescenti, quindi

$$\exists \lim_{n \to +\infty} A_n = \sup_n A_n \qquad \exists \lim_{n \to +\infty} B_n = \sup_n B_n$$

Teorema (Criterio del confronto - 2ª forma)

Date $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$ a termini positivi, cioè $a_n \geq 0$ $b_n \geq 0$,

t.c. $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$

1) $\sum_n a_n$ diverge $\Rightarrow$ $\sum_n b_n$ diverge

2) $\sum_n b_n$ converge $\Rightarrow$ $\sum_n a_n$ converge

<u>dim</u>

1) $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = 0 \Rightarrow \exists n_0 > 0 : \forall n > n_0 \quad a_n \leq b_n$

(per Ipotesi) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 > 0 : \forall n > n_0 \quad -\varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < \varepsilon$

$\Downarrow$

$\varepsilon = 1 \quad \exists n_0 > 0 : \forall n > n_0 \quad 0 \leq \frac{a_n}{b_n} < 1$

$\Downarrow$

$\exists n_0 > 0 : \forall n > n_0 \quad a_n \leq b_n$

Ma allora segue la tesi in a) e b), in quanto valgono tutte le ipotesi del Teorema del confronto $\not{y}$

Esercizio ($\sum_n 1/n^\alpha$ diverge $\forall \alpha \leq 1$)

Provare che $\sum_n 1/n^\alpha$ diverge $\forall \alpha \leq 1$

dim

$\sum_n 1/n$ è a termini positivi e non converge $\Big\} \Rightarrow \sum_n 1/n$ diverge a $+\infty$

Inoltre

$n \geq n^\alpha \quad \forall n \geq 1 \quad \forall \alpha < 1$

$\Downarrow$

$\left[\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^\alpha} \quad \forall n \geq 1 \quad \forall \alpha < 1\right] + \left[\sum_n 1/n \text{ diverge a } +\infty\right]$

$\Downarrow$ (Teorema del Confronto)

$\sum_n 1/n^\alpha$ diverge a $+\infty \quad \forall \alpha < 1$

Esercizio ($\sum_n 1/n^\alpha$ converge $\forall \alpha \geq 2$)

Provare che $\sum_n 1/n^\alpha$ converge $\forall \alpha \geq 2$

dim

$\sum_n 1/(n^2-n)$ converge (serie di Mengoli)

$\Downarrow$ (Teorema Confronto)

$\sum_n 1/n^2$ converge (poiché $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n^2-n} \quad \forall n \geq 2$)

Ma $n^2 \leq n^\alpha \quad \forall \alpha \geq 2 \quad \forall n \geq 1$

$\Downarrow$

$\left[1/n^2 \geq 1/n^\alpha \quad \forall \alpha > 1 \quad \forall n \geq 1\right] + \left[\sum_n 1/n^2 \text{ converge}\right]$

$\Downarrow$ (teorema del Confronto)

$\sum_n 1/n^\alpha$ converge $\forall \alpha \geq 2$

Teorema (del confronto asintotico)

Siano $\sum_n a_n$ $\sum_n b_n$ serie a termini positivi $a_n \geq 0$ $b_n > 0$

Se $\exists \lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell \in]0, +\infty[$

allora $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$ hanno lo stesso carattere, cioè convergono entrambe o divergono entrambe

dim

$\lim_n \frac{a_n}{b_n} = \ell \in]0, +\infty[$ (ipotesi) $\Rightarrow$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} > 0 \ \forall n > \bar{n} \quad \ell - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < \ell + \varepsilon$

$\Rightarrow \varepsilon = \ell/2 \ \exists \bar{n} > 0 \ \forall n > \bar{n} \quad \left(\frac{\ell}{2}\right) \cdot b_n < a_n < \left(\frac{3}{2}\ell\right) \cdot b_n$

$\Rightarrow \exists \bar{n} > 0 : \forall n > \bar{n} \ \left(\frac{\ell}{2}\right) b_n \leq a_n$ (i)

$\exists \bar{n} > 0 \quad \forall n > \bar{n} \quad a_n \leq \left(\frac{3}{2}\ell\right) \cdot b_n$ (ii). Allora

$\sum_n a_n$ convergente $\Rightarrow$ $\sum_n b_n$ convergente

$\left(\frac{\ell}{2}\right) b_n \leq a_n \ \forall n > \bar{n}$ Teorema Confronto

$\sum_n a_n$ divergente $\Rightarrow$ $\sum_n b_n$ divergente

$a_n \leq \left(\frac{3}{2}\ell\right) b_n \ \forall n > \bar{n}$ Teorema confronto

$\sum_n b_n$ convergente $\Rightarrow$ $\sum_n a_n$ convergente

$a_n \leq \left(\frac{3}{2}\ell\right) b_n \ \forall n > \bar{n}$ Teorema Confronto

$\sum_n b_n$ divergente $\Rightarrow$ $\sum_n a_n$ divergente

$\left(\frac{\ell}{2}\right) b_n \leq a_n \ \forall n > \bar{n}$ Teorema Confronto

Esercizio: Studiare la convergenza di

$$\sum_n \operatorname{sen}(1/n^2)$$

dim

$a_n = \operatorname{sen} 1/n^2 \geq 0$ e $\lim_{n \to \infty} \operatorname{sen} 1/n^2 = 0$

Ricordo $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \frac{\operatorname{sen} 1/n^2}{1/n^2} = 1$

La serie $\sum_n 1/n^2$ converge in quanto $\sum_n 1/n^\alpha$ converge $\forall \alpha > 1$

Per il Criterio del confronto asintotico anche $\sum_n \operatorname{sen} 1/n^2$ converge

Esercizio Studiare la convergenza della serie

$$\sum_n n^\alpha \operatorname{sen} \frac{1}{n^2}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$

dim

$a_n = n^\alpha \operatorname{sen} \frac{1}{n^2}$: considerata $b_n = \frac{1}{n^{2-\alpha}}$ si ha

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^\alpha \operatorname{sen} 1/n^2}{1/n^{2-\alpha}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\operatorname{sen} 1/n^2}{1/n^2} = 1$$

e quindi per il Criterio confronto asintotico il comportamento di $\sum_n a_n$ è lo stesso di $\sum_n b_n$.
Si ha che

$\sum_n b_n = \sum_n \frac{1}{n^{2-\alpha}}$ converge se $2 - \alpha > 1$ se $1 > \alpha$

N.B. $\sum_n n^\alpha \operatorname{sen} \frac{1}{n^2} \neq \sum_n \frac{1}{n^{2-\alpha}}$

anche se

$\sum_n n^\alpha \operatorname{sen} \frac{1}{n^2}$ converge se $\sum_n 1/n^{2-\alpha}$ converge

" diverge se " diverge

N.B. $\sum_{n\geq 1} a_n \neq \sum_{n\geq 1000} a_n$

però

$\sum_{n\geq 1} a_n$ converge se $\sum_{n\geq 1000} a_n$ converge

" diverge se " diverge

Criteri della radice e del rapporto

Ricordiamo che $\sum_n q^n$ $\begin{cases} \text{converge a } \frac{1}{1-q} \text{ se } 0\leq q<1 \\ \text{diverge a } +\infty \text{ se } q=1 \\ \text{diverge a } +\infty \text{ se } 1<q \end{cases}$

Teorema (Criterio del rapporto)

Sia $\sum_n a_n$ tale che $a_n>0 \ \forall n\in\mathbb{N}$

Inoltre $\exists \lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$

Se $0\leq \ell<1$ allora $\sum_n a_n$ converge

Se $1<\ell$ " $\sum_n a_n$ diverge

dim

$1<\ell<+\infty$

Nella dimostrazione del criterio rapporto fatta per le successioni si arrivava a provare che

$\exists k>0 \ \exists n_0>0 : \forall n>n_0 \quad k\cdot\left(\frac{1+\ell}{2}\right)^n \leq a_n$

dove $k>0$ e $\frac{1+\ell}{2}>1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^n = +\infty \Rightarrow \lim_n a_n = +\infty \neq 0$

Teorema confronto

Condizione necessaria

$\Rightarrow \sum_n a_n$ diverge a $+\infty$

$\ell=+\infty$

Procedendo come nel caso precedente, si ha

$\exists k>0 \ \exists n_0>0 \ \forall n>n_0 \quad \left(\frac{3}{2}\right)^n\cdot k \leq a_n$

$\ldots \Rightarrow \sum_n a_n$ diverge a $+\infty$

$0 \le \ell < 1$

Anche in questo caso, procedendo come nel Criterio radice per le successioni si ottiene

$$\begin{cases} \exists k>0\ \exists n_0>0 : 0 \le a_n \le \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^n \cdot K \\ \sum_n^{+} \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^n \text{ converge} \end{cases} \quad \left(0<\frac{1+\ell}{2}<1\right)$$

$$\xRightarrow{\text{Criterio Confronto}} \sum_n a_n \text{ converge}$$

Esercizio Studiare la convergenza di

$$\sum_n \frac{n!}{n^n}$$

dim

$a_n = \frac{n!}{n^n} > 0 \quad \forall n \ge 1$ e $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{\cancel{n!}\,\cancel{(n+1)}}{(n+1)^n\cancel{(n+1)}} \cdot \frac{n^n}{\cancel{n!}}$$

$$= \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{e} < 1$$

Criterio Rapporto

$$\Rightarrow \sum_n \frac{n!}{n^n} \text{ converge}$$

Teorema (Criterio della radice)

Sia $\sum_n a_n$ una serie a termini positivi

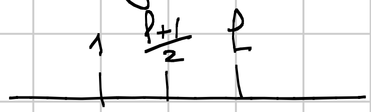
Si suppone che $\exists \lim_n \sqrt[n]{a_n} = l > 0$

Se $0 \leq l < 1$ allora $\sum_n a_n$ converge

Se $1 < l$ " " diverge

dim

$1 < l < +\infty$ Per ipotesi



$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} > 0 : \forall n > \bar{n} \quad l - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < l + \varepsilon$

$\Downarrow$

$\varepsilon = \frac{l-1}{2} \ \exists \bar{n} > 0 : \forall n > \bar{n} \quad \frac{l+1}{2} = l - \frac{l-1}{2} < \sqrt[n]{a_n}$

$\Downarrow$

$\exists \bar{n} > 0 : \forall n > \bar{n} \quad \left(\frac{l+1}{2}\right)^n < a_n \qquad \text{con } \frac{l+1}{2} > 1$

Ne segue che $a_n \underset{n \to +\infty}{\not\to} 0 \Rightarrow \sum_n a_n$ diverge a $+\infty$

$l = +\infty$

$\forall M \in \mathbb{R} \ \exists \bar{n} > 0 \ \forall n > \bar{n} \quad M < \sqrt[n]{a_n}$

$\Downarrow$

$M = 3/2 \ \exists \bar{n} > 0 \ \forall n > \bar{n} \quad \left(\frac{3}{2}\right)^n < a_n$

$\Downarrow$

$a_n \underset{n \to +\infty}{\not\to} 0 \Rightarrow \sum_n a_n$ diverge

$0 \leq l < 1$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} > 0 \ \forall n > \bar{n} \quad l - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < l + \varepsilon$

$\Downarrow$

$\varepsilon = \frac{1-l}{2} \ \exists \bar{n} > 0 \ \forall n > \bar{n} \quad 0 \leq \sqrt[n]{a_n} < \frac{l+1}{2} = l + \frac{1-l}{2} < 1$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} \exists \bar{n} > 0 \ \forall n > \bar{n} \quad 0 \leq a_n < \left(\frac{1+l}{2}\right)^n \\ + \\ \sum_n \left(\frac{1+l}{2}\right)^n \text{ converge} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ (Teorema confronto) $\sum_n a_n$ converge ✓

OSSERVAZIONE (il caso $\ell = 1$ è indecidibile)

Quando $\sqrt[n]{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, non si può concludere nulla (infatti

$\sum_n 1/n$ diverge a $+\infty$ e $\sqrt[n]{1/n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

$$\left(\frac{1/(n+1)}{1/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \right)$$

$\sum_n 1/n^2$ converge e $\sqrt[n]{1/n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

$$\left(\frac{1/(n+1)^2}{1/n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \right)$$

Esercizio: $q > 0$ $\quad Q_n = \sum_{k=1}^{n} q^k$

a) Calcolare Q_n esplicitamente e $\lim_{n\to+\infty} Q_n$

b) Studiare, al variare di $q > 0$, la convergenza di $\sum_n (q \cdot Q_n)^n$

dim

a) $q = 1$ $\quad Q_n = \sum_{k=1}^{n} 1 = n$

$q \neq 1$ $\quad Q_n = \sum_{k=1}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} - 1 = q\,\frac{1-q^n}{1-q}$

$$\lim_{n\to+\infty} Q_n = \begin{cases} +\infty & q > 1 \\ +\infty & q = 1 \\ \frac{q}{1-q} & 0 < q < 1 \end{cases}$$

b) $\sum_n (q Q_n)^n$ $\qquad b_n = (q Q_n)^n > 0$ (è a termini positivi)

$$\sqrt[n]{b_n} = q \cdot Q_n = \begin{cases} n & q = 1 \\ q^2\,\frac{1-q^n}{1-q} & q \neq 1 \end{cases}$$

$$\lim_n \sqrt[n]{b_n} = \begin{cases} +\infty & q \geq 1 \\ q^2/(1-q) & 0 < q < 1 \end{cases}$$

Se $q \geq 1$ allora la serie diverge

Se $0<q<1$ allora la serie converge $\left|\frac{q^2}{1-q}\right|<1$

" " diverge $\left|\frac{q^2}{1-q}\right|>1$

$$\frac{q^2}{1-q}=1 \text{ sse } q^2+q-1=0 \text{ sse } q_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

• $0<q<1$ e $0<q<\frac{-1+\sqrt{5}}{2}<1 \Rightarrow 0\leq\frac{q^2}{1-q}<1$

$\Rightarrow \sum_n (q\cdot a_n)^n$ converge

• Se $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}<q<1$ allora $1<\frac{q^2}{1-q}$

allora $\sum_n (q\, a_n)^n$ diverge

• Se $q=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ allora $\frac{q^2}{1-q}=1$

allora $(q\,a_n)^n=\left(q^2\cdot\frac{1-q^n}{1-q}\right)^n=(1-q^n)^n$

allora $b_n=(1-q^n)^n \geq 1-nq^n \quad \forall n>1$

allora $\lim_{n\to+\infty} b_n \geq \lim_{n\to+\infty}(1-nq^n)=1$

allora $\lim_{n\to+\infty} b_n \neq 0$

allora $\sum_n b_n$ diverge a $+\infty$

Esercizio: Studiare la convergenza della serie $\sum_n \left[n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) + (2+\alpha)^{-2n} \right]$ al variare di $\alpha > 0$

dim

$$a_n = n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) + (2+\alpha)^{-2n} = b_n + c_n \qquad \alpha > 0$$

1) $\sum_n n \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \qquad \alpha > 0$

$$\frac{n \operatorname{sen}\left(1/n^\alpha\right)}{n \cdot 1/n^\alpha} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$$

La serie $\sum_n \frac{1}{n^{\alpha-1}}$ converge $\underline{\text{se}}$ $\alpha - 1 > 1$

$\underline{\text{se}}$ $\alpha > 2$

dunque per il Criterio confronto asintotico

$\sum_n n \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{n^\alpha}$ converge $\underline{\text{se}}$ $\alpha > 2$

2) La serie $\sum_n c_n = \sum_n \left[\frac{1}{(2+\alpha)^2}\right]^n$ è una serie geometrica di ragione $\frac{1}{(2+\alpha)^2}$

Questa converge $\underline{\text{se}}$ $\frac{1}{(2+\alpha)^2} < 1$

$\underline{\text{se}}$ $(2+\alpha)^2 > 1$ $\underline{\text{se}}$ $2+\alpha < -1$ o $1 < 2+\alpha$

$\underline{\text{se}}$ $\alpha < -3$ o $-1 < \alpha$

Dunque $\sum_n a_n$ converge

$$\forall \alpha \in \left(]2, +\infty[\right) \cap \left(]-\infty, -3[\cup]-1, +\infty[\right)$$

$$\forall \alpha \in]2, +\infty[\qquad \Downarrow$$

Esercizio Studiare la convergenza di

$$\sum_n \left(\frac{n}{1+n}\right)^{n^2}$$

dim

$$\sqrt[n]{\left(\frac{n}{1+n}\right)^{n^2}} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \longrightarrow \frac{1}{e} < 1$$

(è una serie a termini positivi)

$$\underset{\text{Criterio Radice}}{\Longrightarrow} \sum_n \left(\frac{n}{1+n}\right)^{n^2} \text{ converge}$$

Osservazione

1) $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} = +\infty$

infatti $2 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3 \quad \forall n \geq 1$

da cui $2^n < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \quad \forall n \geq 1$

$$2^n \xrightarrow{n\to+\infty} +\infty$$

Teorema Confronto

$$\Longrightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

In alternativa $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \underset{\text{Bernoulli}}{\geq} 1 + \frac{n^2}{n} = 1+n \quad \forall n \geq 1$

da cui segue la tesi per il teorema confronto in quanto $\lim_n (1+n) = +\infty$

2) $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = 1$

Infatti $2 < \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} < 3 \quad \forall n \geq 1$

da cui segue $\sqrt[n]{2} < \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n < \sqrt[n]{3} \quad \forall n \geq 1$

$$\sqrt[n]{2} \xrightarrow{n\to+\infty} 1, \qquad \sqrt[n]{3} \xrightarrow{n\to+\infty} 1$$

Teorema 2 Carabinieri

$$\Longrightarrow \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = 1$$