Lezione 27 - Analisi Matematica 1 - 18 novembre 2013

Zenone di Elea proponeva il dilemma di "Achille piè veloce e la Tartaruga"
Achille, che parte dopo la tartaruga, non può superarla poiché
- per percorrere $\frac{1}{2}$ del percorso impiega T secondi
- " " $\frac{1}{4}$ " " " $\frac{T}{2}$ "
- " " $\frac{1}{8}$ " " " $\frac{T}{4}$ "

Insomma, per raggiungere la tartaruga Achille impiega

$$T + \frac{T}{2} + \frac{T}{4} + \frac{T}{8} + \dots + \frac{T}{2^n} + \dots$$

ovvero un "Tempo ∞" inquanto compaiono "∞ addendi" !!!!
Chiaramente non può essere vero: Achille sorpassa la Tartaruga!

La spiegazione segue dallo studio di $\sum_n q^n$

Considerano $S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = q^0 + q^1 + q^2 + \dots + q^n$

$$S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} + q^n$$

quando $q = 1$ $\quad S_n = 1 + 1 + 1^2 + 1^3 + \dots + 1^n = n+1$

Determiniamo una formula chiusa per $S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k \quad q \neq 1$

$$S_n(1-q) = (1+q+q^2+ \dots +q^{n-1}+q)(1-q)$$

$$\begin{aligned} &= 1+\cancel{q}+\cancel{q^2}+ \dots +\cancel{q^{n-1}}+\cancel{q^n} \\ &\qquad -\cancel{q}-\cancel{q^2}+ \dots -\cancel{q^{n-1}}-\cancel{q^n}-q^{n+1} \\ &= 1-q^{n+1}. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} \quad \text{se } q \neq 1 \text{ e dunque}$$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} = \dfrac{q^{n+1}-1}{q-1}, & q \neq 1 \\ n+1, & q=1 \end{cases}$$

Ricordo poi

$q>1 \quad q^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

$q=1 \quad 1^n \longrightarrow 1 \neq 0$

$|q|<1 \Rightarrow |q|^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \Rightarrow q^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

$q \leq -1 \Rightarrow q^n \not\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Ne segue che

$$T + \frac{T}{2} + \frac{T}{4} + \dots = T\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+ \dots\right)$$

$$= T \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = T \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2T$$

Esercizio: Provare che $0,\bar{9} = 1$

dim

$$0,\bar{9} = \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \dots = \frac{9}{10} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k$$

$$= \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{1-1/10} = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{9/10} = 1$$

$$0,1\overline{23} = \frac{1}{10} + \frac{23}{10^3} + \frac{23}{10^5} + \dots$$

$$= \frac{1}{10} + \frac{23}{10^3}\left(1 + \frac{1}{10^2} + \dots + \frac{1}{10^{2n}} + \dots\right)$$

$$= \frac{1}{10} + \frac{23}{1000} \frac{1}{1-\frac{1}{10^2}} = \frac{1}{10} + \frac{23}{990}$$

$$= \frac{122}{990}$$

Successioni di Cauchy

Def (Successione di Cauchy)

Data $\{a_n\}_n$ successione reale, questa si dice "Successione di Cauchy"
se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} > 0 \ \forall n, m > \bar{n} \quad |a_n - a_m| < \varepsilon$

ovvero equivalentemente

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} > 0 \ \forall m > \bar{n} \ \forall k \in \mathbb{N} \quad |a_{m+k} - a_m| < \varepsilon$

Oss: Questa def richiama la def di limite, però "MANCA ℓ"

Problema: $\exists$ una successione di Cauchy?

Risposta $\quad \{\frac{1}{k}\}_{k \geq 1}$ è di Cauchy

$$\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} < 2\varepsilon$$

$m > \frac{1}{2M}$ e $n > \frac{1}{2M}$

devo provare

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} \ \forall n, m \geq \bar{n} \qquad \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| < 2\varepsilon$$

$\Downarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1 : \forall n, m > \bar{n} \quad \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| < \frac{1}{n} + \frac{1}{m} < 2\varepsilon$$

Ci sono altre successioni di Cauchy?

Sì: Tutte le successioni convergenti

Teorema ($a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \in \mathbb{R}$ allora $\{a_n\}_n$ è di Cauchy)

$\{a_n\}_n$ successione reale

Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$ allora $\{a_n\}_n$ è di Cauchy

dim

Hp $\forall \varepsilon>0 \ \exists \bar{n}>0 : \forall n>\bar{n} \quad |a_n - l| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon>0 \ \exists \bar{n}>0 : \forall m>\bar{n} \quad |a_m - l| < \varepsilon$

$\Downarrow$

$\forall \varepsilon>0 \ \exists \bar{n}>0 : \forall n,m > \bar{n} \quad |a_n - a_m| = |a_n - l + l - a_m| \le$

$\le |a_n - l| + |l - a_m| < 2\varepsilon$

↯

Problema: $\exists \{a_n\}_n$ che non è di Cauchy?

$\{a_n\}_n$ non è di Cauchy se

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \bar{n} > 0 \ \exists n_\varepsilon, m_\varepsilon > \bar{n} : |a_{n_\varepsilon} - a_{m_\varepsilon}| \geq \varepsilon$$

Esempio: $\{a_n\}_n = \{n^2\}_n$ non è di Cauchy

dim

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \bar{n} > 0 \ \exists n_\varepsilon, m_\varepsilon > \bar{n} : |a_{n_\varepsilon} - a_{m_\varepsilon}| \geq \varepsilon$$

$$(n+1)^2 - n^2 = 2n+1 \geq 1 \quad \forall n$$

$$\exists \varepsilon = 1 : \forall \bar{n} > 0 \ \exists n_\varepsilon, m_\varepsilon > \bar{n} : |(n_\varepsilon)^2 - (m_\varepsilon)^2| \geq 1$$

$$\exists \varepsilon = 1 \quad \forall \bar{n} > 0 \quad \exists n_\varepsilon = (\bar{n}+2) \quad m_\varepsilon = (\bar{n}+1) :$$

$$(\bar{n}+2)^2 - (\bar{n}+1)^2 = 2\bar{n} + 3 \geq 3 > 1 \ !$$

Teorema ($a_n \xrightarrow[n]{} l \in \mathbb{R}$ sse $\{a_n\}_n$ è di Cauchy)

Sia $\{a_n\}_n$ una successione reale convergente

Sono affermazioni equivalenti

1) $\{a_n\}_n$ è convergente a $l \in \mathbb{R}$

2) $\{a_n\}_n$ è di Cauchy

dim

1) $\Rightarrow$ 2) è già stato provato

2) $\Rightarrow$ 1)

(i) $\{a_n\}_n$ di Cauchy $\Rightarrow$ $\{a_n\}_n$ è limitata

Per ipotesi $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} > 0 \ \forall n, m > \bar{n} \quad -\varepsilon < a_n - a_m < \varepsilon$

$\Downarrow$

$\varepsilon = 1 \ \exists \bar{n} > 0 : \forall n > \bar{n} \quad m = \bar{n}+1 \qquad -1 < a_n - a_{\bar{n}+1} < 1$

$\Downarrow$

$\exists \bar{n} > 0 \ \forall n > \bar{n} \quad a_{\bar{n}+1} - 1 < a_n < a_{\bar{n}+1} + 1$

$\Downarrow$

$\exists \bar{n} > 0 : \forall n > \bar{n} \qquad |a_n| \leq |a_{\bar{n}+1}| + 1$

Sia $k = \max\{|a_0|, |a_1|, \dots, |a_{\bar{n}}|\}$

$\Downarrow$

$|a_n| \leq \max\{k, |a_{\bar{n}+1}|+1\} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $\{a_n\}_n$ è limitata $\underset{\text{Bolzano Weierstrass}}{\Rightarrow}$ $\exists \{a_{k_n}\}_n$ estratta convergente

ovvero $a_{k_n} \xrightarrow[n]{} l \in \mathbb{R}$

(iii) $\{a_n\}_n$ di Cauchy
$\{a_{k_n}\}_n$ convergente a l $\Rightarrow$ $\{a_n\}$ convergente a l

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n}_1 > 0 \ \forall n, m > \bar{n}_1 \qquad |a_n - a_m| < \varepsilon$

$\quad '' \quad \exists \bar{n}_2 > 0 \ \forall n > \bar{n}_2 \qquad |a_{k_n} - l| < \varepsilon$

$\Downarrow \ \bar{n} = \max\{\bar{n}_1, \bar{n}_2\}$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} > 0 : \forall n, m > \bar{n} \quad \begin{cases} |a_n - a_m| < \varepsilon \\ |a_{k_n} - l| < \varepsilon \end{cases}$

ma $|a_n - l| = |a_n - a_{k_n} + a_{k_n} - l| = |a_n - a_{k_n}| + |a_{k_n} - l|$

$< 2\varepsilon$

poiché $n > \bar{n} \Rightarrow k_n \geq n > \bar{n} \Rightarrow n, k_n > \bar{n}$

$\Rightarrow |a_n - a_{k_n}| < \varepsilon$

inoltre $n > \bar{n} \quad |a_{k_n} - l| < \varepsilon$

dunque $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} > 0 \ \forall n > \bar{n} \quad |a_n - l| < 2\varepsilon$

OSS: Dire che $\{a_n\}_n$ è di Cauchy significa
dire che $\{a_n\}$ è convergente ma
SENZA CONOSCERE ℓ

Serie Numeriche

$$\sum_{n\geq 0}(-1)^n = \overset{0}{(1-1)}+\overset{0}{(1-1)}+\overset{0}{(1-1)}+\cdots\cdots = 0$$

$$\neq ??$$

$$= 1\overset{0}{(-1+1)}\overset{0}{(-1+1)}\overset{0}{(-1+1)}\cdots\cdots = 1$$

Il problema è che, sommando ∞ termini,
NON VALE LA PROPRIETÀ ASSOCIATIVA

ovvero dati per esempio tre numeri

$15 + 4 + 23 = 42$

ci sono $3! = 6$ modi diversi per farne la somma

Il procedimento convenuto per sommare ∞ termini

$$a_0+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$$

$$a_0 \longrightarrow (a_0+a_1) \longrightarrow (a_0+a_1)+a_2 \quad \text{etc}$$

Def (Serie numerica di termine generale a_n)

Diciamo "serie di termine generale a_n" e la indichiamo con $\sum_n a_n$
la successione $\{S_n\}_n$ ove $S_n=\sum_{k=0}^{n} a_k$

somma

S_n si dice "ridotta parziale n-esima"

somma serie

$\sum_n a_n$ si dice "convergente" se $\exists \lim_n S_n = S = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \in \mathbb{R}$

" " " "divergente" se $\exists \lim_n S_n = +\infty \ (-\infty)$

" " " "indeterminata" se $\nexists \lim_n S_n$

Il numero $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = S \in \mathbb{R}$
viene detto "somma della serie"

OSS: Non confondere la serie $\sum_n a_n = \{S_n\}_n$
(che è una successione) con $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = S$ (che è un numero di $\mathbb{R}$) che il limite della successione

Ricordando $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ se $\lim_{n\to+\infty} |a_n| = 0$

dunque $\left[\lim_n |q|^n = 0 \text{ se } |q|<1\right] \iff \left[\lim_n q^n = 0 \text{ se } |q|<1\right]$

La serie geometrica $\sum_n q^n$

Considerato $S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = 1+q+q^2+\dots+q^n$ si ha

$$S_n(1-q) = (1+q+q^2+\dots+q^{n-1}+q^n)(1-q) = 1+\cancel{q}+\cancel{q^2}+\dots+\cancel{q^{n-1}}+\cancel{q^n}+ \;-\cancel{q}-\cancel{q^2}-\dots-\cancel{q^{n-1}}-\cancel{q^n}-q^{n+1} = 1-q^{n+1}$$

$\Rightarrow$ (se $q\neq 1$) $S_n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Quindi $S_n = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{se } q\neq 1 \\ n+1 & \text{se } q=1 \end{cases}$ da cui segue

$$\lim_n S_n = \begin{cases} +\infty, & \text{se } q\geq 1 \\ \dfrac{1}{1-q}, & \text{se } -1<q<1 \\ \text{non esiste}, & \text{se } q\leq -1 \end{cases}$$

ovvero $\sum_n q^n \begin{cases} \text{diverge a } +\infty, & \text{se } q\geq 1 \\ \text{ha somma } \dfrac{1}{1-q}, & \text{se } |q|<1 \\ \text{non converge}, & \text{se } q\leq -1 \end{cases}$

Infatti, $q>1 \Rightarrow \lim_n S_n = \dfrac{1-\lim_n(q^n)}{1-q} = \dfrac{\lim_n(q^n)-1}{q-1} = \dfrac{+\infty-1}{q-1} = +\infty$

$q=1 \Rightarrow \lim_n S_n = \lim_n (n+1) = +\infty$

$-1<q<1 \Rightarrow \lim_n S_n = \dfrac{1-\lim_n q^n}{1-q} = \dfrac{1-0}{1-q} = \dfrac{1}{1-q}$

$q=-1 \Rightarrow \lim_n S_n = \dfrac{1-\lim_n(-1)^n}{2}$ e questo limite $\nexists$

$q<-1 \Rightarrow \lim_n S_n = \dfrac{1-\lim_n q^n}{1-q}$ " " " "

Probleme: $0,\overline{9} \neq 1$

$$0,\overline{9} = \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \cdots = \frac{9}{10}\left(1 + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{10^n} + \cdots\right)$$

$$= \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{1 - 1/10} = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{9/10} = 1$$

Probleme $0,1\overline{35} = 0,135\,35\,35\cdots \in \mathbb{Q}$?

$$\frac{1}{10} + \frac{35}{1000} + \frac{35}{100.000} + \frac{35}{10^7} + \cdots =$$

$$= \frac{1}{10} + \frac{35}{10^3} \cdot \left(1 + \frac{1}{10^2} + \cdots\right) = \frac{1}{10} + \frac{35}{10^3} \cdot \frac{1}{1 - 1/10^2} =$$

$$= \frac{1}{10} + \frac{35}{10^3} \frac{10^2}{99} = \frac{1}{10} + \frac{35}{99 \cdot 10} = \frac{99+35}{990} = \frac{134}{990} \in \mathbb{Q}$$

Calcolare $0,\overline{3}$

Probleme $3 \times 0,\overline{3} \overset{?}{=} 1$

Serie armonica generalizzata $\boxed{\sum_n 1/n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

La serie $\sum_n 1/n^\alpha$ $\begin{cases} \text{converge se } \alpha > 1 \\ \text{diverge a } +\infty \text{ se } \alpha \leq 1 \end{cases}$

(La dimostrazione si farà in seguito)

Esempio (Serie Telescopica o di Mengoli)

Studiare $\sum_n \frac{1}{n(n+1)}$ e calcolarne la somma

dim

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

$$= \left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) \cancel{+} \dots \cancel{+} \left(\cancel{\frac{1}{n-1}} - \cancel{\frac{1}{n}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

e quindi $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$

Esercizio Data $\sum_{n \geq 10} \frac{3}{(n+4)(n+5)}$

calcolarne (se esiste) la somma

dim

$$a_n = \frac{3}{(n+4)(n+5)} = \frac{3}{n+4} - \frac{3}{n+5} \quad \text{e dunque}$$

$$\sum_{k=10}^{n} a_k = \sum_{k=10}^{n} \left(\frac{3}{k+4} - \frac{3}{k+5}\right) = \frac{3}{14} - \frac{3}{n+5} = S_n$$

$$S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} S = \sum_{k=10}^{\infty} \frac{3}{(k+4)(k+5)} = \frac{3}{14}$$

Esempio ($\sum_n (-1)^n$ serie non convergente)

$\sum_n (-1)^n$ è una serie di termine generale $a_n = (-1)^n$

Le ridotte n-esime sono

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k = 1-1+1-1+\dots+(-1)^n \quad \text{e dunque}$$

$$S_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ è pari} \\ 0 & \text{" } n \text{ è dispari} \end{cases} \quad \text{cioè } \{S_n\}_n = \left\{\frac{1+(-1)^n}{2}\right\}_n$$

Ma allora

$$\{S_{2n}\}_n = \{1\}_n \quad \text{e dunque } S_{2n} = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

$$\{S_{2n+1}\}_n = \{-1\}_n \quad \text{" " } S_{2n+1} = -1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1.$$

dunque $\{S_n\}_n$ non converge $\lightning$

Oss: Studieremo la convergenza perché se una serie converge e $S \in \mathbb{R}$ allora

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \bar{n} : \; \forall n \geq \bar{n} \quad \left| S - \sum_{k=0}^{n} a_k \right| < \varepsilon$$

ovvero quanto più aggiungo termini, quanto più approssimo S

Oss: Le due serie

$$\sum_{n\geq 1} a_n \quad \text{e} \quad \sum_{n \geq 10^{100}} a_n$$

- convergono entrambe
- divergono "
- sono entrambe indeterminate

Teorema (Condizione Necessaria)

Se $\sum_n a_n$ è convergente, allora $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$

dim

Per ipotesi $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \xrightarrow[n \to +\infty]{} S \in \mathbb{R}$ somma della serie

(e dunque anche $\underset{\text{sottosuccessione}}{S_{n-1}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} S$) si ha che

limite somma = somma limiti.

$$0 = \overset{S}{\lim_n S_n} - \overset{S}{\lim_n S_{n-1}} = \lim_n (S_n - S_{n-1}) =$$

$$= \lim_n \left(\sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \right) = \lim_n a_n$$

ovvero $\lim_n a_n = 0$

Oss: questo risultato è molto utile per provare che una serie non è convergente, infatti se $\lim_n a_n \neq 0$ allora $\sum_n a_n$ non converge

Esempio: Studiare la convergenza di $\sum_n \frac{n}{n+1}$

dim

$$a_n = \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1 \neq 0$$

$\Rightarrow \sum_n a_n$ non converge

Oss: Essendo $\sum_n \frac{n}{n+1}$ a termini positivi e $n/_{n+1} \to 1 \neq 0 \Rightarrow \sum_n a_n$ diverge a $+\infty$.

Teorema (Condizione Necessaria e Sufficiente di Cauchy)

Data una serie numerica $\sum_n a_n$, sono tra loro equivalenti

(i) $\sum_n a_n$ converge

(ii) $\forall \varepsilon>0 \ \exists \bar{m}>0 \ \forall m>\bar{m} \ \forall k \in \mathbb{N} \ |a_{m+k}+a_{m+k-1}+\dots+a_{m+1}|<\varepsilon$

dim

$\sum_n a_n$ converge

sse

$\{S_n\}_n$ è convergente $\qquad S_m=\sum_{k=0}^{m} a_k$

sse

$\{S_n\}_n$ è di Cauchy

sse

$\forall \varepsilon>0 \ \exists \bar{m}>0 : \forall m>\bar{m} \ \forall k \in \mathbb{N} \ |S_{m+k}-S_m|<\varepsilon$

sse

$\forall \varepsilon>0 \ \exists \bar{m}>0 : \forall m>\bar{m} \ \forall k \in \mathbb{N} \ \left|\sum_{i=0}^{m+k} a_i-\sum_{i=0}^{m} a_i\right|<\varepsilon$

sse

$\forall \varepsilon>0 \ \exists \bar{m}>0 : \forall m>\bar{m} \ \forall k \in \mathbb{N} \ |a_{m+k}+\dots+a_{m+1}|<\varepsilon$

Esempio (Importante : $\sum_n 1/n$ non converge)

Proviamo che $\sum_{n\geq 1} 1/n$ non converge

dim

Proveremo che $\{S_n\}_n$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, non è di Cauchy

$$\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-1} + \dots + \frac{1}{n+1} \geq \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

$\Downarrow$

$\exists \varepsilon = 1/2 : \forall \bar{n} > 0 \ \exists n_1, m_1 > \bar{n} : \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_1 - 1} + \dots + \frac{1}{m_1} \geq \frac{1}{2}$

$\exists \varepsilon = 1/2 \ \forall \bar{n} > 0 \ \exists n_1 = 2\bar{n} \ m_1 = \bar{n}+1 \ \frac{1}{2\bar{n}} + \dots + \frac{1}{\bar{n}+1} \geq \frac{1}{2}$

dunque $\{S_n\}_n$ non è di Cauchy

" $\sum_n 1/n$ non converge $\lightning$

Oss (Importante $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \not\Rightarrow \sum_n a_n$ converge)

Presa $\sum_n 1/n$, la serie armonica,

si ha che

- $a_n = 1/n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

  mentre

- $\sum_n 1/n$ non converge

Serie a Termini positivi

Def (Serie a Termini positivi)
Una serie $\sum_n a_n$ si dice "a Termini positivi"
se $a_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

Le serie a Termini positivi convergono o divergono a $+\infty$

Teorema ($\sum_n a_n$ $a_n \geq 0$ converge o diverge a $+\infty$)

$\sum_n a_n$ serie a Termini positivi
Allora $\sum_n a_n$ o converge o diverge a $+\infty$

dim

Sia $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$; essendo $a_n \geq 0 \ \forall n$ si ha

$$\left.\begin{array}{l} S_0 = a_0 \\ S_1 = S_0 + a_1 \geq S_1 \\ S_2 = S_1 + a_2 \geq S_2 \\ \dots \\ S_n = S_{n-1} + a_n \geq S_{n-1} \end{array}\right\} \text{ ovvero } S_0 \leq S_1 \leq S_2 \leq \dots \leq S_n \leq \dots$$

Essendo $\{S_n\}_n$ una successione debolmente crescente
$\Rightarrow$ (limite successioni monotone) $\exists \lim_{n \to +\infty} S_n = \sup_n \{S_n\}$

e quest'ultimo può essere un numero reale o $+\infty$
cioè la Tesi $\lightning$

Esempio $\sum_n 1/n$ diverge positivamente

dim

$\sum_n 1/n$ è a Termini positivi

$\sum_n 1/n$ non converge (lo abbiamo provato)

$\Rightarrow \sum_n 1/n$ diverge a $+\infty$ $\lightning$

Teorema (Criterio del confronto)

Date $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$ a termini positivi, cioè $a_n \geq 0$ $b_n \geq 0$, tali che $a_k \leq b_k$ $\forall k \geq n_0$

1) $\sum_n a_n$ diverge $\Rightarrow$ $\sum_n b_n$ diverge

2) $\sum_n b_n$ converge $\Rightarrow$ $\sum_n a_n$ converge

dim

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \qquad B_k = \sum_{k=0}^{n} b_k$$

$$A_n = \sum_{k=0}^{n_0} a_k + \sum_{k=n_0+1}^{n} a_k = A_{n_0} + \sum_{k=n_0+1}^{n} a_k \leq$$

$$\leq A_{n_0} + \sum_{k=n_0+1}^{n} b_k = A_{n_0} + \left(\sum_{k=0}^{n} b_k - \sum_{k=0}^{n_0} b_k\right)$$

$$= A_{n_0} + B_n - B_{n_0}$$ ovvero

$$A_n \leq B_n + (A_{n_0} - B_{n_0}) \quad \forall n \geq 0$$

Confronto successioni

1) $\sum_n a_n$ diverge $\Rightarrow \lim_n A_n = +\infty \Rightarrow \lim_n B_n = +\infty$
$\Rightarrow \sum_n b_n$ diverge

Confronto successioni

2) $\sum_n b_n$ converge $\Rightarrow \lim_n B_n = B < +\infty \Rightarrow$
$\Rightarrow \lim_n A_n \leq B + (A_{n_0} - B_{n_0}) \Rightarrow \sum_n a_n$ converge ↯

Esercizio ($\sum_n 1/n^\alpha$ diverge $\forall \alpha \leq 1$)

Provare che $\sum_n 1/n^\alpha$ diverge $\forall \alpha \leq 1$

dim

$\left.\begin{array}{l}\sum_n 1/n \text{ è a termini positivi} \\ \text{e non converge}\end{array}\right\} \Rightarrow \sum_n 1/n$ diverge a $+\infty$

Inoltre

$n \geq n^\alpha \quad \forall n \geq 1 \quad \forall \alpha < 1$

$\Downarrow$

$\left[\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^\alpha} \quad \forall n \geq 1 \quad \forall \alpha < 1\right] + \left[\sum_n 1/n \text{ diverge a } +\infty\right]$

$\Downarrow$ (Teorema del Confronto)

$\sum_n 1/n^\alpha$ diverge a $+\infty$ $\forall \alpha < 1$

Esercizio ($\sum_n 1/n^\alpha$ converge $\forall \alpha \geq 2$)

Provare che $\sum_n 1/n^\alpha$ converge $\forall \alpha \geq 2$

dim

$\sum_n 1/(n^2-n)$ converge (serie di Mengoli)

$\Downarrow$ (Teorema Confronto)

$\sum_n 1/n^2$ converge (poiché $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n^2-n}$ $\forall n \geq 2$)

Ma $n^2 \leq n^\alpha$ $\forall \alpha \geq 2$ $\forall n \geq 1$

$\Downarrow$

$\left[1/n^2 \geq 1/n^\alpha \quad \forall \alpha > 1 \quad \forall n \geq 1\right] + \left[\sum_n 1/n^2 \text{ converge}\right]$

$\Downarrow$ (teorema del Confronto)

$\sum_n 1/n^\alpha$ converge $\forall \alpha \geq 2$