Lezione 26 - Analisi Matematica 1 - 18 novembre 2013

Funzioni continue su un intervallo

Teorema (di Weierstrass – esistenza min e max)

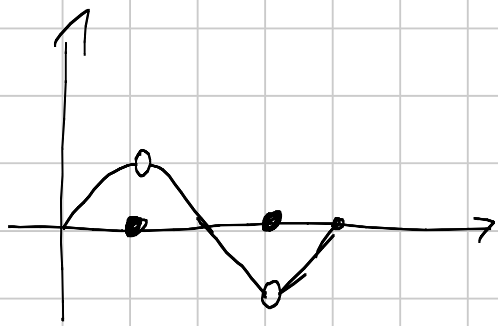
Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua su $[a,b]$ chiuso e limitato

allora $\exists\, x_m \in [a,b] : f(x_m)=\min f([a,b])$

$\exists\, x_M \in [a,b] : f(x_M)=\max f([a,b])$

Controesempio (f non continua $\Rightarrow$ Non vale Weierstrass)

Si prende
$$f(x)=\begin{cases}\operatorname{sen} x & x\in[0,2\pi]\setminus\{\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi\}\\ 0 & x=\frac{\pi}{2}\\ 0 & x=\frac{3}{2}\pi\end{cases}$$



$$\sup f([0,2\pi]) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \operatorname{sen} x = 1 > f(x) \quad \forall x\in[0,2\pi]$$

$\nexists \max f([0,2\pi])$

$$\inf f([0,2\pi]) = \lim_{x\to\frac{3}{2}\pi^-} \operatorname{sen} x = -1 < f(x) \quad \forall x\in[0,2\pi]$$

$\nexists \min f([0,2\pi])$

Controesempio (intervallo illimitato)

Presa $f(x) = x \operatorname{sen} x$, questa è continua su tutto $\mathbb{R}$

e quindi lo è su $[a, +\infty[$

Proviamo che $\nexists \max f$ e $\nexists \min f$.

$x_n = \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi$ $\qquad \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = +\infty \Rightarrow$

$x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ $\qquad \Rightarrow \sup f([a, +\infty[) = +\infty$

$y_n = \frac{3}{2}\pi + n 2\pi$ $\qquad \lim_{n \to +\infty} f(y_n) = \lim_{n \to +\infty} f\left(\frac{3}{2}\pi + 2n\pi\right) = -\infty \Rightarrow$

$y_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ $\qquad \Rightarrow \inf f([a, +\infty[) = -\infty$

dimm

Proviamo l'esistenza del max $f([a,b])$

$\emptyset \neq f([a,b]) \subseteq \mathbb{R}$, dunque $\exists\ \Lambda = \sup f([a,b])$.

Se $\Lambda \in f([a,b])$ allora vale la Tesi

se $\Lambda \notin f([a,b])$ allora è punto di accumulazione per $f([a,b])$

allora $\exists \{y_n\}_n \subseteq f([a,b])$ $y_n \xrightarrow[n]{} \Lambda$

Ma allora $\exists \{x_n\} \subseteq [a,b]$: $f(x_n) = y_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \Lambda$

Thm Bolzano Weierstrass

Ma $\{x_n\}_n \subseteq [a,b] \Longrightarrow \exists \{x_{k_n}\}_n$ sottosuccessione $\lim_n x_{k_n} = \overline{x}$ con $\overline{x} \in [a,b]$

Ma per la continuità di f in $\overline{x}$ $\lim_{n \to +\infty} f(x_{k_n}) = f(\overline{x})$

Ma $\lim_n f(x_n) = \lim_n y_n = \Lambda \Rightarrow \lim_n f(x_{k_n}) = \Lambda$

Allora $f(\overline{x}) = \Lambda = \max f([a,b])$

Analogamente sia $\lambda = \inf f([a,b])$
Procedendo come in precedenza, si conclude $\lambda = \min f([a,b])$

Oss : Non va confuso

x_m = punto di minimo di f su $[a,b]$

con

$f(x_m) = \min f([a,b])$

Osservazione (IMPORTANTE)

Il Teorema di Weierstrass ci garantisce l'esistenza del $\max f([a,b])$ $\min f([a,b])$

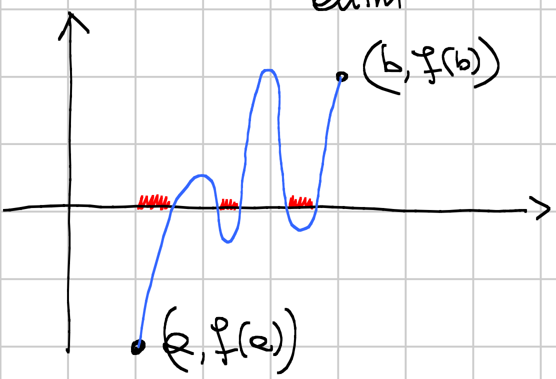
Però NON DICE COME TROVARLI

Teorema (Esistenza degli zeri - BOLZANO)

Sia $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ continua $\forall x \in [a,b]$

Se $f(a)f(b)<0$ allora $\exists z \in]a,b[: f(z)=0$

dim



Suppongo $f(a)<0<f(b)$

$A=\{x \in [a,b] : f(x)<0\}$

Si osserva che $A \neq \emptyset$: infatti $a \in A$

" " " $M_A \neq \emptyset$: " $b \notin A$, $x \leq b \; \forall x \in A$

dunque $\exists z \in [a,b]$ t.c. $z = \sup A$

Abbiamo tre possibilità $\begin{cases} f(z)<0 \\ f(z)=0 \\ f(z)>0 \end{cases}$

Se proviamo che $f(z)<0$ e $f(z)>0$ portano ad un assurdo, abbiamo provato la Tesi

- $f(z)<0 \Rightarrow \exists \delta>0 : f(x)<0 \ \forall x \in]z-\delta, z+\delta[\cap]a,b[$

(Teorema Permanenza Segno)

$\Rightarrow z = \sup A > z+\delta$ ma questo è ASSURDO

(Teorema Permanenza Segno)

- $f(z)>0 \Rightarrow \exists \delta>0 : f(x)>0 \ \forall x \in]z-\delta, z+\delta[\cap]a,b[$

$\Rightarrow z = \sup A < z-\delta$ ma questo è ASSURDO

- Dunque $f(z)=0$, che è la Tesi $\lightning$

OSSERVAZIONE (IMPORTANTE)

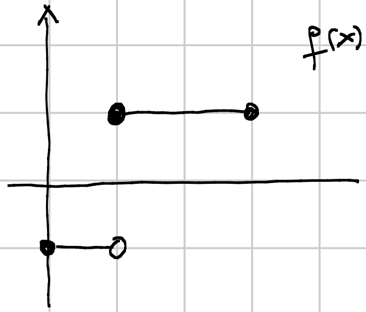
Le dimostrazioni del Teorema di Weierstrass (Teorema di Bolzano) sono

NON COSTRUTTIVE

ovvero provano l'ESISTENZA dei punti di massimo/minimo (zero di f)

MA NON DICONO COME CALCOLARLI IN MODO ESPLICITO

Osservazione: f non continua, $f(a)f(b)<0$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$
non è detto valga la Teri

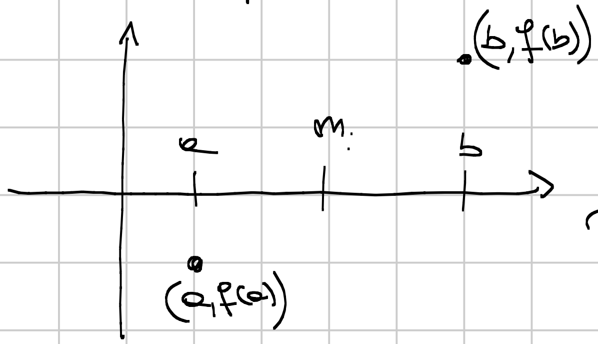


$f(x)=\begin{cases} -1 & 0\le x<1 \\ 1 & 1\le x\le 3 \end{cases}$ non ha zeri
in $[0,3]$, pur essendo
$f(0)\,f(3)<0$

Metodo di BISEZIONE

Per il calcolo approssimato delle radici di $f(x)=0$ esiste un metodo, la bisezione, che opportunamente formulato permette di scrivere una dimostrazione (diversa da quella data) del Teorema di Bolzano

Sia dato $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua su $[a,b]$ t.c. $f(a)f(b)<0$



Per il Teorema di Bolzano
$\exists z\in\,]a,b[\,: f(z)=0$

Prendiamo $m=\dfrac{a+b}{2}$

1) $f(m)=0$: ho finito

2) $f(m)<0$: prendo $a_1=m$ e $b_1=b$
$f:[a_1,b_1]\to\mathbb{R}$ continua $f(a_1)f(b_1)=f(m)f(b)<0$
$\Rightarrow \exists z\in\,]a_1,b_1[\,=\,]m,b[$

3) $f(m) > 0$: prendo $a_1 = a$ $b_1 = m$

$f : [a_1, b_1] \to \mathbb{R}$ continua $f(a_1) f(b_1) = f(a) f(m) < 0$

$\Rightarrow \exists\, z \in]a_1, b_1[=]a, m[\; : f(z) = 0$

Adesso prendiamo $m_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$ e iteriamo il procedimento

Trovo $[a_2, b_2]$ intervallo contenente lo zero

Prendiamo $m_2 = \frac{a_2 + b_2}{2}$ etc

Oss: questo metodo permette di calcolare una radice di $f(x) = 0$ con un'approssimazione buona a piacere!!

Esempio (Metodo di Bisezione)

Determinare le radici del polinomio $f(x)=x^3+2x-1$

dim

Osservo che $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty < 0 < \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$f(0) = -1 < 0 < 2 = f(1)$, f continua } Teorema di esistenza degli zeri

$\Rightarrow \underbrace{\exists z \in]0,1[}$: $f(z)=0$

$\frac{0+1}{2} = m = \frac{1}{2}$ $\quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} + \frac{2}{2} - 1 = \frac{1}{8} > 0$

$f(0) = -1 < 0 < \frac{1}{8} = f\left(\frac{1}{2}\right)$ f continua } Thm $\exists$ degli zeri

$\Rightarrow \underbrace{\exists z \in]0, \frac{1}{2}[}$ $f(z)=0$

$\frac{0+\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4} = m$ $\quad f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{64} + \frac{2}{4} - 1 = \frac{1}{64} - \frac{1}{2} < 0$

$f\left(\frac{1}{4}\right) < 0 < f\left(\frac{1}{2}\right)$ f continua } Thm $\exists$ degli zeri

$\Rightarrow \underbrace{\exists z \in]\frac{1}{4}, \frac{1}{2}[}$: $f(z)=0$

$\frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{8} = m$ $\quad f\left(\frac{3}{8}\right) = \frac{27}{(64)^2} + \frac{3}{4} - 1 < 0$

$f\left(\frac{3}{8}\right) < 0 < f\left(\frac{1}{2}\right)$ f continua

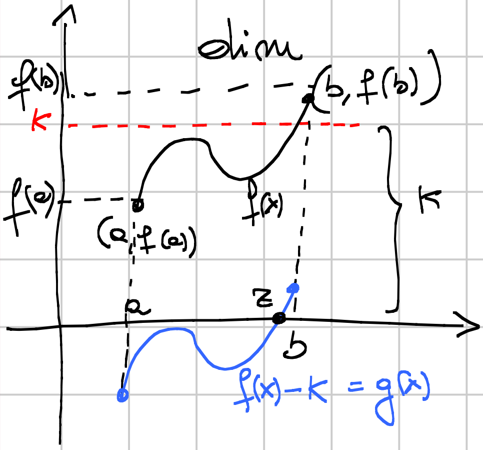
$\Rightarrow \exists z \in]\frac{3}{8}, \frac{1}{2}[$: $f(z)=0$ etc

Corollario (del Teorema di Bolzano)

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua e $f(a)<f(b)$

Allora $\forall k : f(a)<k<f(b)$ $\exists z\in\,]a,b[\,: f(z)=k$

dim



Si introduce la funzione

$g(x)=f(x)-k$

- $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ è continua
- $g(a)=f(a)-k$

$$\wedge$$
$$0$$
$$\wedge$$

$g(b)=f(b)-k$

Applico a g il Teorema di Bolzano e trovo che esiste $z\in\,]a,b[\,: g(z)=0=f(z)-k$

ovvero $f(z)=k$

Teorema (dei valori intermedi)

Sia $f:I\to\mathbb{R}$, I intervallo, f continua $\forall x\in I$

Allora $f(I)$ è un intervallo

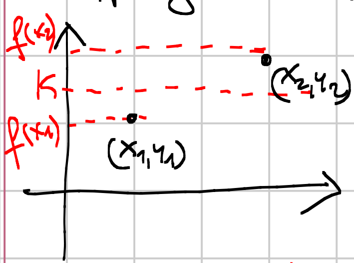
dim

TS $\forall y_1,y_2\in f(I)$, $\underbrace{y_1<y_2}$, si ha $[y_1,y_2]\subseteq f(I)$

Se $y_1,y_2\in f(I)$ allora $\exists x_1,x_2\in I$: $f(x_1)=y_1$ $f(x_2)=y_2$

Inoltre $y_1\neq y_2 \Rightarrow x_1\neq x_2$ (f è una funzione)

Suppongo $x_1<x_2$ e $y_1=f(x_1)<f(x_2)=y_2$



$\left.\begin{array}{l} f:[x_1,x_2]\to\mathbb{R} \text{ continua} \\ f(x_1)<f(x_2) \end{array}\right\}$

$\Rightarrow \forall k : f(x_1)<k<f(x_2)$

$\exists x_k\in\,]x_1,x_2[\,: f(x_k)=k$

$\Rightarrow \forall k\in\,]\overset{f(x_1)}{y_1},\overset{f(x_2)}{y_2}[$ $\exists x_k\in\,]x_1,x_2[$: $f(x_k)=k$

$\Rightarrow\,]y_1,y_2[\,\subseteq f(I)$

Corollario (del Teorema dei valori intermedi)

$f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo, f continua $\forall x \in I$

Allora $\widehat{f(I)} \subseteq \left] \inf f(I), \sup f(I) \right[$

Corollario (del Teorema valori intermedi e Weierstrass)

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua $\forall x \in [a,b]$ chiuso e limitato

allora $f([a,b]) = \left[\min f([a,b]) ; \max f([a,b]) \right]$

dim

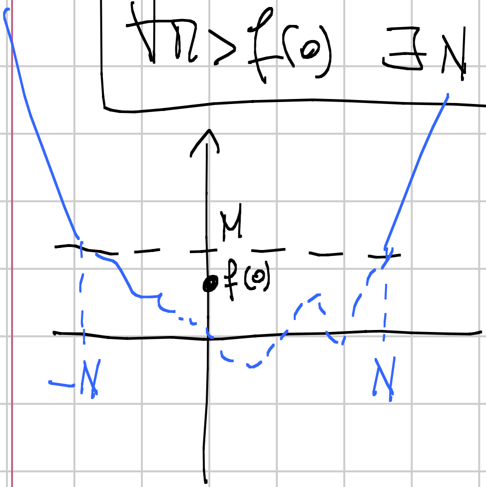
$f(0)\in\mathbb{R}$ esiste

Hp $\forall M>f(0)\ \exists N_1>0 : N_1<x \Rightarrow M<f(x)$

$\forall M>f(0)\ \exists N_2>0 : x<-N_2 \Rightarrow M<f(x)$

$N=\max\{N_1,N_2\}$

$$\boxed{\forall M>f(0)\ \exists N : |x|>N \Rightarrow M<f(x)}$$



$[-N,N]$ è chiuso e limitato

$f:[-N,N]\to\mathbb{R}$ continua

$\Downarrow$ Weierstrass

$\exists x_m\in[-N,N] : f(x_m)=\min f([-N,N]) \leq f(0)$

- $\forall x\in[-N,N] \quad f(x)\geq f(x_m)$
- $\forall x\in\mathbb{R}\setminus[-N,N] \quad f(x)>M>f(0)\geq f(x_m)$

Teorema (Corollario Teorema Weierstrass)

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua $\forall x \in \mathbb{R}$

1) Se $\lim_{x \to \pm\infty} f = +\infty$ allora $\exists x_m \in \mathbb{R}$ $f(x_m) = \min f(\mathbb{R})$

2) Se $\lim_{x \to \pm\infty} f = -\infty$ allora $\exists x_M \in \mathbb{R}$ $f(x_M) = \max f(\mathbb{R})$

3) Se $\lim_{x \to \pm\infty} f = l$ ed $\exists a, b \in \mathbb{R}$: $f(a) > l > f(b)$

allora $\exists x_m, x_M \in \mathbb{R}$: $f(x_m) = \min f([a,b])$

$f(x_M) = \max f([a,b])$

dim

1) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ si traducono come

$\forall M > 0 \ \exists N_1 > 0$: $x < -N_1 \Rightarrow M < f(x)$

$\forall M > 0 \ \exists N_2 > 0$: $N_2 < x \Rightarrow M < f(x)$

preso $N = \max\{N_1, N_2\}$

$\Downarrow$

$\forall M > 0 \quad \exists N > 0$: $|x| > N \Rightarrow M < f(x)$

$\Downarrow$

$M = f(0)$ $\exists N > 0$: $|x| > N \Rightarrow f(0) < f(x)$

Ora $f: [-N, N] \to \mathbb{R}$ continua $\forall x \in [-N, N]$ e per il Teorema di Weierstrass

si ha che $\exists x_m \in [-N, N]$: $f(x_m) = \min f([-N,N]) \leq f(0)$

Dunque $\forall x \in [-N,N]$ $f(x_m) \leq f(x)$

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus [-N,N]$ $f(x_m) \leq f(0) < f(x)$ $\Rightarrow f(x_m) = \min f(\mathbb{R})$

2) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty = \lim_{x \to +\infty} f(x)$

$\Downarrow$ procedendo come in precedenza nel punto 1)

$\exists N > 0$: $|x| > N \Rightarrow f(x) < f(0)$

Posto $f(x_M) = \max f([-N, N])$ si ha (ragionando come nel p.to 1))

$\max f(\mathbb{R}) = \max f([-N, N])$

3) per ipotesi $\lim_{x\to -\infty} f(x) = l = \lim_{x\to +\infty} f(x)$ da cui segue, ragionando come nel punto 1)

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 : \quad |x| > N \Rightarrow l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$$

Fissiamo ora ε_0 : $f(b) < l - \varepsilon_0$ & $l + \varepsilon_0 < f(a)$

$\Downarrow$

Fissato ε_0 $\exists N > 0$: $|x| > N \Rightarrow f(b) < l - \varepsilon_0 < f(x) < l + \varepsilon_0 < f(a)$

Per il Teorema Weierstrass, essendo $f : [-N, N] \to \mathbb{R}$ continua, esistono $x_m, x_M \in [-N, N]$ t.c.

$$f(x_m) = \min f([-N,N]) < f(b)$$
$$f(x_M) = \max f([-N,N]) > f(a)$$

Da qui segue che

$\forall x \in [-N, N] \quad f(x_m) \leq f(x)$

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus [-N,N] \quad f(x_m) < f(b) < l - \varepsilon_0 < f(x)$

$\Rightarrow f(x_m) = \min f(\mathbb{R})$

$\forall x \in [-N, N] \quad f(x) \leq f(x_M)$

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus [-N,N] \quad f(x) < l + \varepsilon_0 < f(a) < f(x_M)$

$\Rightarrow f(x_M) = \max f(\mathbb{R})$

$\lightning$