Lezione 25 - Analisi Matematica 1 - 14 novembre 2013

Teorema (Permanenza segno)

$\{a_n\}_n$ successione reale

Se $\exists \lim_n a_n = l > 0$ allora $\exists \bar{n} > 0 : a_n > 0 \ \forall n > \bar{n}$

dim

Si prende $0 < l < +\infty$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} : \forall n > \bar{n} \quad l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon$

$\Downarrow$

$\varepsilon = l/2 \quad \exists \bar{n} > 0 : \forall n > \bar{n} \qquad 0 < \frac{l}{2} = l - \frac{l}{2} < a_n$

$\Downarrow$

$\exists \bar{n} > 0 : \forall n > \bar{n} \qquad 0 < a_n$

$l = +\infty$

$\forall M > 0 \ \exists \bar{n} > 0 \quad \forall n > \bar{n} \qquad M < a_n$

$\Downarrow$

$M = 1 \quad \exists \bar{n} > 0 \quad \forall n > \bar{n} \qquad 0 < 1 < a_n$ $\quad \lightning$

Teorema ($a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists c > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n| \leq c$)

$\{a_n\}_n$ successione reale

Se $\exists \lim_{n\to+\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$ allora $\exists c > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n| \leq c$

dim

Per ipotesi $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} > 0 : \forall n > \bar{n} \quad l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon$

$\Downarrow$

$\varepsilon = 1 \ \exists \bar{n} > 0 : \forall n > \bar{n} \quad l - 1 < a_n < l + 1$

$\Downarrow$

$\exists \bar{n} > 0 : \forall n > \bar{n} \qquad |a_n| \leq \max\{|l-1|, |l+1|\} \leq |l| + 1$

Posto $K = \max\{|a_0|, |a_1|, \dots, |a_{\bar{n}}|\}$

si ha che

$|a_n| \leq c = \max\{K, |l|+1\} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ $\lightning$

Osservazione

(i) $\{a_n\}_n$ t.c. $\exists \lim_{n\to+\infty} a_n = l \in \mathbb{R} \Rightarrow |a_n| \le c \ \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.c. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$$\Rightarrow |f(x)| \le c < +\infty \quad \forall x \in]a, +\infty[$$

però

non è detto che $|f(x)| \le K \ \forall x \in \mathbb{R}$

Esempio

$f(x) = e^{-x}$ $\quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0^+ \Rightarrow \exists K = 1 \in \mathbb{R}$ t.c.

$$|f(x)| \le 1 \ \forall x \ge 0$$

però

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} e^{-x} = \sup e^{\mathbb{R}} = \lim_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty \ !!!$$

$f: A \to B$ è debolmente crescente se $x < y \Rightarrow f(x) \le f(y)$

Oss: Data una successione reale

$[a_n \le a_{n+1} \quad \forall n]$ sse $[a_n \le a_m \quad \forall m \ge n]$

infatti

- $a_n \le a_m \ \forall m > n \Rightarrow$ (preso $m = n+1$) $\forall n \ a_n \le a_{n+1}$

viceversa

- $a_n \le a_{n+1} \ \forall n \Rightarrow$ preso $m > n$

$$\underset{\text{vera}}{a_m \ge a_{m-1}} \ \underset{\text{vera}}{\ge a_{m-2}} \ \underset{\text{vera}}{\ge} \cdots \ge a_{n+1} \underset{\text{vera}}{\ge} a_n$$

$\Rightarrow \forall m > n \ a_m \ge a_n$ $\quad \mathcal{Y}$

Esempio (Il numero e)

① $e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ è strettamente crescente (fatto come esercizio su induzione)

② $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ è " decrescente (dimostrate qui di seguito)

$b_2 = \left(1+\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{27}{8} < 4 = (1+1)^2 = b_1$ (Base dell'induzione)

Suppongo $b_n < b_{n-1}$ (Hip. induttive)

Voglio provare $b_{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$

ma questo equivale a $\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2} < \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+2} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)$

" " " " $\frac{n+1}{n} < \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+2}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2}$

" " " " $\left(1+\frac{1}{n}\right) < \left[\frac{(n+1)^2}{n\cdot(n+2)}\right]^{n+2} = \left[1+\frac{1}{n(n+2)}\right]^{n+2}$

Ma quest'ultima è vera infatti $\left[1+\frac{1}{n(n+2)}\right]^{n+2} \underset{\text{Bernoulli}}{\ge} 1+\frac{1}{n}$

3) $e_n \le b_n \quad \forall n \ge 1$

equivale a dire $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad \forall n \ge 1$

" " " $1 \le 1 + \frac{1}{n} \quad \forall n \ge 1$ vera

Si deduce che $\exists \lim_{n \to +\infty} e_n = e$

dalla stretta crescenza di $\{e_n$

$2 = e_1 < e_n \quad \forall n > 1$ segue dalla stretta crescenza di e

Ma $e_n \le b_n \quad \forall n$, e si ha $b_n \le b_5 = \left(1+\frac{1}{5}\right)^6 = 2{,}986 \quad \forall n > 5$

$\Rightarrow e_n < b_5 < 3 \quad \forall n > 5$

$\Rightarrow 2 < \lim_{n \to +\infty} e_n = e < 3 \qquad e \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Dalla monotonia di e_n e b_n e dalla 3) segue

$$e_1 = 2 < e_n \le b_n < \left(1+\frac{1}{5}\right)^6 = 2{,}986 < 3 \quad \forall n > 5$$

Per il Teorema precedente $\exists \lim_{n \to +\infty} e_n = e$

$\exists \lim_{n \to +\infty} b_n = \ell$

e si avrà $2 < e < 3 \qquad 2 < \ell < 3$

Inoltre, essendo $b_n = e_n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)$, si avrà

$\ell = \lim_n b_n = e$

Interessi composti

Se un capitale C viene depositato in banca in un conto corrente che offre un interesse del 10% (con molta fantasia), dopo 12 mesi

$$\underset{1^{\circ}\text{ gennaio}}{C} \longrightarrow \underset{31\text{ dicembre}}{C\left(1+\frac{10}{100}\right)}$$

Se però la banca carica gli interessi dopo 6 mesi

$$\underset{1\text{ gennaio}}{C} \longrightarrow \underset{1\text{ luglio}}{C\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{10}{100}\right)} \longrightarrow \underset{31\text{ dicembre}}{C\left(1+\frac{1}{2}\,\frac{10}{100}\right)^2}$$

Ovviamente $C\left(1+\frac{1}{2}\,\frac{10}{100}\right)^2 > C\left(1+10/100\right)$

Se gli interessi sono caricati 3 volte

$$C \longrightarrow \underset{1\text{ maggio}}{C\left(1+\frac{1}{3}\,\frac{10}{100}\right)} \longrightarrow \underset{1\text{ settembre}}{C\left(1+\frac{1}{3}\,\frac{10}{100}\right)^2} \longrightarrow \underset{31\text{ dicembre}}{C\left(1+\frac{1}{3}\,\frac{10}{100}\right)^3}$$

Si osserva che

$$C\left(1+\frac{i}{100}\right) < C\left(1+\frac{1}{2}\,\frac{i}{100}\right)^2 < C\left(1+\frac{1}{3}\,\frac{i}{100}\right)^3 < \dots$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\,\frac{i}{100}\right)^n = e^{i/100}$$

Oss: Se $i = 100\%$ allora il capitale a fine anno è raddoppiato

$$\underset{1^\circ \text{ gennaio}}{C} \longrightarrow \underset{31 \text{ dicembre}}{C(1+1) = 2C}$$

se si ricapitalizza n volte il capitale C

$$C \to C(1+1/n) \to \dots \to C(1+1/n)^n$$

e quando $n \to +\infty$

$$C \longrightarrow C \cdot \lim_{n\to+\infty}(1+1/n)^n = C \cdot e$$

dove $2 < e < 3$

La successione $e_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ è strettamente crescente $\forall n > |\lfloor x \rfloor| + 1$, dunque $\exists \lim_{n\to+\infty} e_n(x)$

Oss: $\forall x \in \mathbb{R}$ $\lfloor x \rfloor \le x < \lfloor x \rfloor + 1 \le |\lfloor x \rfloor| + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$ $-1 < \frac{x}{|\lfloor x \rfloor|+1}$ $\lfloor x \rfloor$ = parte intera di x

$$\Rightarrow \left(1+\frac{x}{n}\right) > 0 \quad \forall n > |\lfloor x \rfloor| + 1$$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{x}{n}\right)^n > 0 \quad ''$$

$$\Rightarrow \lim_n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x > 0$$

La funzione e^x si può definire come segue

$$e^x = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \qquad x\in\mathbb{R}$$

Si ottiene che

① $e^x > 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$ infatti, $\forall x\in\mathbb{R}$, $\exists \bar{n} = |\lfloor x\rfloor|+1$:

$$-1 < \frac{x}{\bar{n}} \Rightarrow 1+\frac{x}{n} > 0 \quad \forall n > \bar{n}$$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \text{ è strett. crescente } \forall n > \bar{n}$$

$$\Rightarrow \exists \lim_n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

② $e^x \geq 1+x \quad \forall x\in\mathbb{R}$

$$e^x \geq \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \underset{\forall n > \bar{n} = |\lfloor x\rfloor|+1}{\overset{\text{Disug. Bernoulli}}{\geq}} 1+\frac{x}{n}\cdot n = 1+x$$

③ $e^0 = 1$

④ $e^{x+y} = e^x e^y$

$$e_n(x)\,e_n(y) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \left(1+\frac{y}{n}\right)^n = \left(1+\frac{x+y}{n}+\frac{xy}{n^2}\right)^n$$

Fissato $\varepsilon \in (0,1)$, sia $\bar{n}$ t.c. $\left|\frac{xy}{\bar{n}}\right| < \varepsilon$ e $|x|+|y|+\varepsilon < \bar{n}$

N.B. $|x|+|y|+\varepsilon < \bar{n} \Rightarrow \frac{|x|+|y|}{\bar{n}} + \frac{\varepsilon}{\bar{n}} < 1 \Rightarrow 1+\frac{x+y}{n}+\frac{xy}{n^2} > 0$

$$\forall n > \bar{n} \qquad 1+\frac{x+y}{n}-\frac{\varepsilon}{n} \le 1+\frac{x+y}{n}+\frac{xy}{n^2} \le 1+\frac{x+y}{n}+\frac{\varepsilon}{n}$$

$$'' \qquad \left(1+\frac{x+y}{n}-\frac{\varepsilon}{n}\right)^n \le e_n(x)\,e_n(y) \le \left(1+\frac{x+y}{n}+\frac{\varepsilon}{n}\right)^n$$

$$'' \qquad e_n(x+y-\varepsilon) \le e_n(x)\,e_n(y) \le e_n(x+y+\varepsilon)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \downarrow_{n\to+\infty} \qquad \downarrow_{n\to+\infty} \qquad \downarrow_{n\to+\infty}$$

$$e^{x+y-\varepsilon} \le e^x e^y \le e^{x+y+\varepsilon}$$

e per l'arbitrarietà di $\varepsilon>0$ concludo che $e^{x+y}=e^x e^y$ $\cancel{\psi}$

$a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$

$2, 3, 7, 11, -117, 8, 106, \pi, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \dots$

Non ha "regolarità" apparenti

crescente, decrescente ...

Data una successione, questa può essere
- monotona
- non monotona

La cosa rilevante è che $\exists$ sempre una estratta monotona

<u>Esempio</u> $\{(-1)^n \cdot n\}_n$ non è monotona, però

$a_{2n} = 2n$ è monotona strett. crescente
$a_{2n+1} = -(2n+1)$ " " " decrescente

Vale il seguente Teorema, fondamentale per la dimostrazione del Teorema di Bolzano Weierstrass

Teorema (esistenza di una sottosuccessione monotona)

$\{a_n\}_n$ sia una successione reale

Allora $\exists \{a_{k_n}\}_n$ sottosuccessione monotona

dim.

$A = \{ n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_k \ \forall k > n \}$

↑ questi indici individuerebbero una sottosucc. deb. crescente

Si hanno 3 casi ① $A = \phi$, ② A finito, ③ A infinito

② A finito $(\# A = m)$ $A = \{ n \in \mathbb{N} \ a_n \leq a_k \ \forall k > n \}$

$N = \max A$

preso $k_1 = N+1$, $\exists k_2 > k_1$, $k_2 \notin A$ (A è finito) : $a_{k_2} < a_{k_1}$ ($k_1 \notin A$)

" k_2, $\exists k_3 > k_2$, $k_3 \notin A$: $a_{k_3} < a_{k_2}$ ($k_2 \notin A$)

" k_n; $\exists k_{n+1} > k_n$ $k_{n+1} \notin A$: $a_{k_{n+1}} < a_{k_n}$ ($k_n \notin A$)

Risulta così costruita $\{a_{k_n}\}_n$ strett. decrescente

① $A = \phi$ in tal caso preso $N = 1$

$k_1 = 2$, $\exists k_2 > k_1$ $k_2 \notin A$: $a_{k_2} < a_{k_1}$ ($k_1 \notin A$)

k_2 ; $\exists k_3 > k_2$ $k_3 \notin A$: $a_{k_3} < a_{k_2}$ ($k_2 \notin A$)

---

k_n ; $\exists k_{n+1} > k_n$ $k_{n+1} \notin A$: $a_{k_{n+1}} < a_{k_n}$ ($k_n \notin A$)

ho costruito $\{a_{k_n}\}_n$ strettamente decrescente

③ $\# A = \infty$ Prendo $M = \min A$ (l'esistenza del minimo equivale al principio induzione)

preso $k_1 = M$, $\exists k_2 \in A$ (A infinito) $k_1 = M < k_2$ ovvero $a_{k_1} \leq a_{k_2}$ ($k_1 \in A$)

preso k_2, $\exists k_3 \in A$ $k_2 < k_3$ " $a_{k_2} \leq a_{k_3}$ ($k_2 \in A$)

---

preso k_n, $\exists k_{n+1} \in A$ $k_n < k_{n+1}$ " $a_{k_n} \leq a_{k_{n+1}}$ ($k_n \in A$)

Risulta così costruita $\{a_{k_n}\}_n$ debolmente crescente ∎

Teorema (Fondamentale: Bolzano Weierstrass)

$\{a_n\}_n$ successione reale

se $\{a_n\}_n$ è limitata allora $\exists\, a_{k_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$

dim

- Data $\{a_n\}_n$, per il Teorema precedente esiste $\{a_{k_n}\}_n$ sottosuccessione MONOTONA
- Essendo $\{a_{k_n}\}_n$ MONOTONA (crescente o decrescente) Allora $\exists \lim_n a_{k_n} = L$
- Essendo $\{a_n\}_n$ limitata, pure $\{a_{k_n}\}$ sarà limitata

$\Rightarrow \lim_n a_{k_n} = L \in \mathbb{R}$ ovvero $\{a_{k_n}\}_n$ converge

Osservazione: questo Teorema

dice che infiniti punti in un intervallo limitato DEVONO avere un punto di accumulazione (o punto limite)

però

non dice come calcolare la sottosuccessione

Funzioni continue su un intervallo

Teorema (di Weierstrass – esistenza min e max)

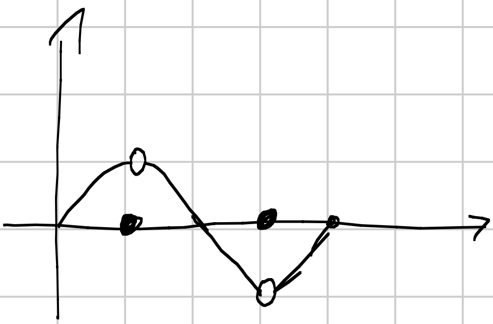
Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua su $[a,b]$ chiuso e limitato

allora $\exists\, x_m \in [a,b] : f(x_m) = \min f([a,b])$

$\exists\, x_M \in [a,b] : f(x_M) = \max f([a,b])$

Controesempio (f non continua $\Rightarrow$ Non vale Weierstrass)

Si prende $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & x\in[0,2\pi]\setminus\{\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\} \\ 0 & x=\pi/2 \\ 0 & x=3/2\,\pi \end{cases}$



$$\sup f([0,2\pi]) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \operatorname{sen} x = 1 > f(x) \quad \forall x\in[0,2\pi]$$

$\nexists \max f([0,2\pi])$

$$\inf f([0,2\pi]) = \lim_{x\to\frac{3}{2}\pi^-} \operatorname{sen} x = -1 < f(x) \quad \forall x\in[0,2\pi]$$

$\nexists \min f([0,2\pi])$

Controesempio (intervallo illimitato)

Presa $f(x) = x \operatorname{sen} x$, questa è continua su tutto $\mathbb{R}$

e quindi lo è su $[a, +\infty[$

Proviamo che $\nexists \max f$ $\nexists \min f$

$x_n = \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi$ $\quad \lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = +\infty \leq \sup\limits_{[a,+\infty[} f$

$y_n = \frac{3}{2}\pi + n 2\pi$ $\quad \lim\limits_{n \to +\infty} f(y_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{2}\pi + 2n\pi\right)(-1) = -\infty \geq \inf\limits_{[a,+\infty[} f$

con $\quad x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty \qquad y_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

Proviamo l'esistenza del max $f([a,b])$

$\emptyset \neq f([a,b]) \subseteq \mathbb{R}$, dunque $\exists\ \Lambda = \sup f([a,b]) \in \overline{\mathbb{R}}$.

Se $\Lambda \in f([a,b])$ allora vale la Tesi

se $\Lambda \notin f([a,b])$ allora è punto di accumulazione per $f([a,b])$

allora $\exists \{y_n\}_n \subseteq f([a,b])$ $y_n \xrightarrow[n]{} \Lambda$

Ma allora $\exists \{x_n\} \subseteq [a,b]$: $f(x_n) = y_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \Lambda$

Ma $\{x_n\}_n \subseteq [a,b] \overset{\text{Thm Bolzano Weierstrass}}{\Longrightarrow} \exists \{x_{k_n}\}_n$ sottosuccessione $\lim_n x_{k_n} = \overline{x}$

con $\overline{x} \in [a,b]$

Ma per la continuità di f in $\overline{x}$ $\lim_{n \to +\infty} f(x_{k_n}) = f(\overline{x})$

Ma $\lim_n f(x_n) = \lim_n y_n = \Lambda \Rightarrow \lim_n f(x_{k_n}) = \Lambda$

Allora $f(\overline{x}) = \Lambda = \max f([a,b])$

La dimostrazione per $\min f([a,b])$ è analoga $\blacksquare$

Osservazione (IMPORTANTE)

Il Teorema di Weierstrass ci garantisce l'esistenza del $\max f([a,b])$ $\min f([a,b])$

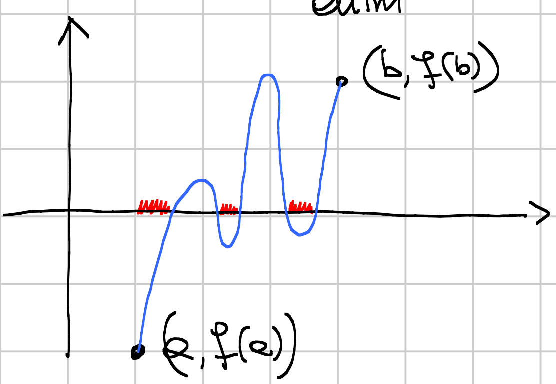
però NON DICE COME TROVARLI

Teorema (Esistenza degli zeri - Bolzano)

Sia $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ continua $\forall x \in [a,b]$

Se $f(a)f(b)<0$ allora $\exists z \in]a,b[: f(z)=0$

dim



Suppongo $f(a)<0<f(b)$

$A=\{x \in [a,b] : f(x)<0\}$

Si osserva che $A \neq \emptyset$: infatti $a \in A$

" " " $M_A \neq \emptyset$: " $b \notin A$, $x \leq b \ \forall x \in A$

dunque $\exists z \in [a,b]$ t.c. $z = \sup A$

Abbiamo tre possibilità $\begin{cases} f(z)<0 \\ f(z)=0 \\ f(z)>0 \end{cases}$

Se proviamo che $f(z)<0$ e $f(z)>0$ portano ad un assurdo, abbiamo provato la Tesi

- $f(z)<0 \xRightarrow{} \exists \delta>0 : f(x)<0 \ \forall x \in]z-\delta, z+\delta[\cap]a,b[$

(Teorema Permanenza Segno)

$\Rightarrow \quad z = \sup A > z+\delta \quad$ ma questo è ASSURDO

(Teorema Permanenza Segno)

- $f(z)>0 \Rightarrow \exists \delta>0 : f(x)>0 \ \forall x \in]z-\delta, z+\delta[\cap]a,b[$

$\Rightarrow \quad z = \sup A < z-\delta \quad$ ma questo è ASSURDO

- Dunque $f(z)=0$, che è la Tesi