Lezione 24 - Analisi Matematica 1 - 12 novembre 2013

Il seguente Teorema è molto importante

Teorema (limiti di funzioni via limiti di successioni)

Sia $f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ p.d.a. per A. Sono equivalenti le seguenti affermazioni

(i) $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$

(ii) $\forall \{x_n\}_n \subseteq A \setminus \{x_0\} : \exists \lim_{n \to +\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \exists \lim_n f(x_n) = \ell$

dim (facoltativa)

(i) $\Rightarrow$ (ii) $\quad x_0, \ell \in \mathbb{R}$

- $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : x \in A \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon$
- $\forall \delta > 0 \ \exists \bar{n} : \forall n > \bar{n} \quad |x_n - x_0| < \delta$

$$\Downarrow$$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \exists \bar{n} > 0 : \forall n > \bar{n} \quad 0 < |x_n - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x_n) - \ell| < \varepsilon$

$$\Downarrow$$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} : \forall n > \bar{n} \quad |f(x_n) - \ell| < \varepsilon$

(ii) $\Rightarrow$ (i)

Per assurdo $\nexists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$

$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \delta > 0 \ \exists x_\delta \in A \quad 0 < |x_\delta - x_0| < \delta \ \& \ |f(x_\delta) - \ell| \geq \varepsilon_0$

$$\Downarrow$$

$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall n \ \exists x_n \in A : 0 < |x_n - x_0| < 1/n \ \& \ |f(x_n) - \ell| \geq \varepsilon_0$

In tal modo costruisco $\{x_n\} \subset A \setminus \{x_0\} : \lim_n x_n = x_0$

e $\lim_n |f(x_n) - \ell| \geq \varepsilon_0$

e questo è assurdo $\lightning$

Il Teorema precedente è utilissimo per

- $\to$ passare dai limiti di funzioni ai limiti di successioni
- $\to$ provare che $\nexists$ un limite di funzione

Teorema (Limiti di funzioni via limiti di successioni)

Sia $f : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ p.d.a. per A. Sono equivalenti le seguenti affermazioni

(i) $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$

(ii) $\forall \{x_n\}_n \subseteq A \setminus \{x_0\} : \exists \lim_{n \to +\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \exists \lim_n f(x_n) = l$

Teorema (continuità via successioni)

Sia $f : A \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in A$: sono equivalenti le seguenti affermazioni.

(i) f continua in x_0

(ii) $\forall \{x_n\}_n \subseteq A \quad x_n \xrightarrow[n]{} x_0 \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow[n]{} f(x_0)$

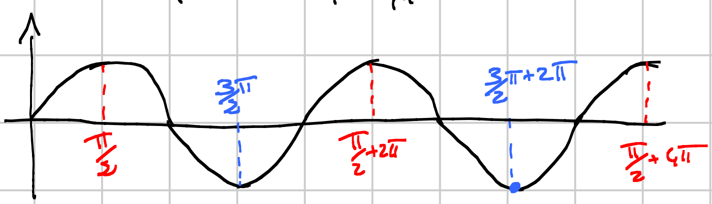
Oss: questo risultato è particolarmente utile per provare che $\nexists \lim_{x \to x_0} f(x)$

Esempio Provare che $\nexists \lim_{x \to +\infty} \operatorname{sen} x$

dim

Costruiremo $\{x_n\}_n \ \{y_n\}_n$ t.c. $\lim_n x_n = \lim_n y_n = +\infty$

ma $\lim_n f(x_n) \neq \lim_n f(y_n)$



$x_n = \frac{\pi}{2} + n\, 2\pi \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty \Rightarrow \operatorname{sen}(x_n) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$

$y_n = \frac{3}{2}\pi + n \cdot 2\pi \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty \Rightarrow \operatorname{sen}(y_n) = \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -1 \xrightarrow[n \to +\infty]{} -1$

Dunque $\nexists \lim_{x \to +\infty} \operatorname{sen} x$!!!

Teorema (x_0 pdo per A allora $\exists \{x_n\}_n \subset A$ $x_n \xrightarrow[n]{} x_0$)

$A \subseteq \mathbb{R}$ x_0 p.d.a. per A

Allora $\exists \{x_n\}_n \subseteq A$ t.c. $\lim_{n \to +\infty} x_n = x_0$

dim

$\boxed{x_0 = +\infty}$ Per ipotesi $\forall N > 0$ $]N, +\infty[\cap A \neq \emptyset$

$N = 0$ $\exists x_0 > 0$ $x_0 \in A$

$N = 1$ $\exists x_1 > \max\{x_0, 1\}$ $x_1 \in A$

N $\exists x_N > \max\{x_{N-1}, N\}$ $x_N \in A$

Ne segue che $x_N \xrightarrow[N \to +\infty]{} +\infty$ $\{x_N\}_N \subseteq A$

$\boxed{x_0 = -\infty}$ Per ipotesi $\forall N > 0$ $\exists x_N \in A$: $x_N < -N$

Ne segue che $x_N \xrightarrow[N \to -\infty]{} -\infty$ (Come prima

$\boxed{x_0 \in \mathbb{R}}$ Per ipotesi $\forall \delta > 0$ $(]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\}) \cap A \neq \emptyset$

$N = 1 \to \delta_1 = 1$ $\exists x_1 \in (]x_0 - 1, x_0 + 1[\setminus \{x_0\}) \cap A$

$N = 2 \to \delta_2 = \min\{|x_0 - x_1|, \delta_1\}$ $\exists x_2 \in (]x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2[\setminus \{x_0\}) \cap A$

$N = 3 \to \delta_3 = \min\{|x_0 - x_2|, \delta_2\}$ $\exists x_3 \in (]x_0 - \delta_3, x_0 + \delta_3[\setminus \{x_0\}) \cap A$

- - - -

$N \to \delta_N = \min\{|x_0 - x_{N-1}|, \delta_{N-1}\}$ $\exists x_N \in (]x_0 - \delta_N, x_0 + \delta_N[\setminus \{x_0\}) \cap A$

In tal modo si è costruita $\{x_N\}_N \subseteq A$ t.c.

$x_N \to x_0$

Def (successione debolmente/fortemente crescente)

Data $\{a_n\}_{n\in S}$ successione reale, questa si dice

debolmente crescente se $a_n \leq a_{n+1}$ $\forall n\in S$

" decrescente se $a_n \geq a_{n+1}$ $\forall n\in S$

strettamente crescente se $a_n < a_{n+1}$ $\forall n\in S$

" decrescente se $a_n > a_{n+1}$ $\cdot \forall$

Le successioni monotone debolmente (e quindi anche le strettamente monotone) godono di una interessante proprietà: hanno limite

Teorema ($\exists$ limite per successioni debolmente monotone)

Sia $\{a_n\}$ una successione reale

Se $\{a_n\}_n$ è debolmente crescente (decrescente)

allora $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \sup\limits_n \{a_n\}$ $\left(\inf\limits_n \{a_n\}\right)$

dim.

Suppongo $\{a_n\}_n$ debolmente crescente ovvero $\boxed{a_n \leq a_{n+1} \ \forall n\in\mathbb{N}}$

Essendo $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$, $\exists$ $l=\sup\limits_n\{a_n\} \in \overline{\mathbb{R}}$

$\boxed{l=+\infty}$ Per ipotesi si ha

$$\begin{cases} \forall M\in\mathbb{R} \ \exists \bar{n}>0 : M<a_{\bar{n}} \\ a_{\bar{n}} \leq a_n \ \forall n>\bar{n} \end{cases} \Rightarrow \forall M\in\mathbb{R} \ \exists \bar{n} : \forall n>\bar{n} \quad M<a_n$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$$

$\boxed{l\in\mathbb{R}}$

$$\begin{cases} l=\sup\limits_n\{a_n\} \\ a_{\bar{n}} \leq a_n \ \forall n>\bar{n} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_n \leq l \ \forall n & ① \\ \forall \varepsilon>0 \ \exists \bar{n}>0 : l-\varepsilon<a_{\bar{n}} & ② \\ a_{\bar{n}} \leq a_n \ \forall n>\bar{n} & ③ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon>0 \ \exists \bar{n}>0 : \forall n>\bar{n} \quad l-\varepsilon \overset{②}{<} a_{\bar{n}} \overset{③}{\leq} a_n \overset{①}{\leq} l < l+\varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon>0 \ \exists \bar{n}>0 : \forall n>\bar{n} \quad l-\varepsilon < a_n < l+\varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_n a_n = l$$

↯