

Lezione 23 - Analisi Matematica 1 - 12 novembre 2013

Criteri del rapporto e della radice

Teorema (Criterio del rapporto)

Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione reale con $a_n > 0 \forall n$

Si supponga che esista $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

Se $0 \leq \rho < 1$ allora $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Se $1 < \rho$ allora $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$

Teorema (Criterio della radice)

Dato $\{a_n\}_n$ successione reale, $a_n \geq 0$, tale che

$$\sqrt[n]{a_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L$$

Se $0 \leq L < 1$ allora $\lim_n a_n = 0$

Se $L > 1$ allora $\lim_n a_n = +\infty$

Oss: questi due teoremi si basano sul confronto con una successione del tipo q^n

$$q^n \leq Q_n \quad \text{con } q > 1 \quad \text{quando } Q_n \rightarrow +\infty$$
$$Q_n \leq q^n \quad \text{" } 0 < q < 1 \quad \text{" } Q_n \rightarrow 0$$

Teorema $(a_{n+1}/a_n \rightarrow l \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} \rightarrow l)$ } dimin
Data $\{a_n\}_m : a_n > 0 \quad \forall n$ } fedrativa
Se $\exists \lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ allora $\exists \lim_n \sqrt[n]{a_n} = l$

Oss: il caso $l=1$ è indecidibile
infatti.

$$Q_n = n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

$$\frac{Q_{n+1}}{Q_n} = \frac{n+1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \in \mathbb{R}$$

$$Q_n = \frac{1}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0^+$$

$$\frac{Q_{n+1}}{Q_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

Esercizio: provare, in modo diretto, che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = \begin{cases} +\infty, & \text{se } q > 1 \\ 1, & \text{se } q = 1 \\ 0, & \text{se } 0 \leq q < 1 \end{cases}$$

dim

$$\begin{aligned} q=1 & \text{ è ovvio} & 1^n & \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \\ q=0 & \text{ " " } & 0^n & \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{aligned} q > 1 & \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : q = 1 + \varepsilon \Rightarrow q^n = (1 + \varepsilon)^n > \underbrace{1 + n\varepsilon}_{\substack{\text{disuguaglianza} \\ \text{Bernoulli}}} \\ & \Rightarrow \text{(per il Teorema Confronto)} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty \end{aligned} \right.$$

$$0 < q < 1 \Rightarrow \frac{1}{q} > 1 \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : \frac{1}{q} = 1 + \varepsilon$$

$$\Rightarrow \frac{1}{q^n} = (1 + \varepsilon)^n > \underbrace{1 + n\varepsilon}_{\substack{\text{disuguaglianza Bernoulli}}} \\ \downarrow \substack{n \rightarrow +\infty \\ +\infty}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{q^n} = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0^+$$

Criterio del rapporto e della radice

Andiamo a provare i criteri della radice e del rapporto:
entrambi poggiano la dimostrazione sul confronto
della successione $\{a_n\}$ in esame con $\{q^n\}$, dove $q > 0$.

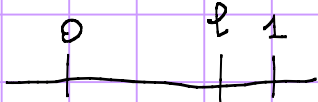
Teorema (Criterio del rapporto)

Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione reale con $a_n > 0 \forall n$

Si supponga che esista $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

Se $0 \leq \rho < 1$ allora $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Se $1 < \rho$ allora $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$

Suppongo $0 \leq \rho < 1$  allora $\frac{\rho+1}{2} < 1$

Per ipotesi

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} : \forall n > \bar{n} \quad \rho - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < \rho + \varepsilon$$

Preso $\varepsilon = \frac{1-\rho}{2}$ $\exists \bar{n} : \forall n > \bar{n}$ $0 < \frac{a_{n+1}}{a_n} < \rho + \frac{1-\rho}{2} = \frac{\rho+1}{2} < 1$

$$\varepsilon = \frac{1-\rho}{2} \exists \bar{n} : \forall n > \bar{n} \quad 0 < a_{n+1} < \left(\frac{\rho+1}{2}\right) a_n \quad \text{con } \frac{\rho+1}{2} < 1$$

dunque

$$0 < a_{\bar{n}+1} < \frac{\rho+1}{2} \cdot a_{\bar{n}}$$

$$0 < a_{\bar{n}+2} < \left(\frac{\rho+1}{2}\right) \cdot a_{\bar{n}+1} < \left(\frac{\rho+1}{2}\right)^2 \cdot a_{\bar{n}}$$

$$0 < a_{\bar{n}+3} < \left(\frac{\rho+1}{2}\right) \cdot a_{\bar{n}+2} < \dots < \left(\frac{\rho+1}{2}\right)^3 \cdot a_{\bar{n}}$$

...

$$0 < a_n < \left(\frac{\rho+1}{2}\right) a_{n-1} < \dots < \left(\frac{\rho+1}{2}\right)^{n-\bar{n}} a_{\bar{n}}$$

ovvero

$$0 < a_n < \left(\frac{\rho+1}{2}\right)^n \cdot \frac{a_{\bar{n}}}{\left(\frac{\rho+1}{2}\right)^{\bar{n}}}$$

$n \rightarrow +\infty$
 $\downarrow$
0

$\downarrow n \rightarrow +\infty$ in quanto $\frac{\rho+1}{2} < 1$
0

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

Analogamente se $l > 1$ allora $l_n \rightarrow +\infty$

Consideriamo il caso $1 < l < +\infty$

$$\begin{array}{c} 1 \quad \frac{l+1}{2} \quad l \\ \hline \end{array}$$

Anche in questo caso,

$$\text{preso } \varepsilon = \frac{l-1}{2} \exists \bar{n} > 0 : \forall n > \bar{n} \quad 1 < \frac{1+l}{2} = l - \varepsilon < \frac{Q_{n+1}}{Q_n}$$

Con un procedimento identico al caso $l < 1$, si ottiene

$$\underbrace{\left(\frac{l+1}{2}\right)^n \cdot \frac{Q_{\bar{n}}}{\left(\frac{l+1}{2}\right)^{\bar{n}}}}_{\substack{\downarrow n \rightarrow +\infty \\ +\infty}} < Q_n \quad \forall n > \bar{n}$$

e dunque si conclude per il Teorema del confronto $\lim_n Q_n = +\infty$

Nel caso $l = +\infty$ si ha che

$$\exists \bar{n} > 0 : \forall n > \bar{n} \quad 2 < \frac{Q_{n+1}}{Q_n}$$

e dunque si ottiene

$$\exists \bar{n} : \forall n > \bar{n} \quad \underbrace{2^n \cdot \frac{Q_{\bar{n}}}{2^{\bar{n}}}}_{\substack{\downarrow n \rightarrow +\infty \\ +\infty}} < Q_n$$

e ancora per il Teorema del confronto $\lim_n Q_n = +\infty$ $\checkmark$

In modo perfettamente analogo vale il seguente

Teorema (Criterio della radice)

Dati $\{a_n\}_n$ successione reale, $a_n \geq 0$, tale che
 $\sqrt[n]{a_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l$

Se $0 \leq l < 1$ allora $\lim_n a_n = 0$

Se $1 < l$ allora $\lim_n a_n = +\infty$

dim. $0 \leq l < 1$

Fisso $\varepsilon = \frac{1-l}{2}$ $\exists \bar{n} : \forall n > \bar{n}$ $0 < \sqrt[n]{a_n} < 1 + \varepsilon = \left(\frac{1+l}{2}\right) < 1$

" " " $0 < a_n < \left(\frac{1+l}{2}\right)^n$

" " " $\downarrow n \rightarrow +\infty$ $\downarrow n \rightarrow +\infty$

0 0

$\Rightarrow$ Per il Teorema dei due carabinieri $\lim_n a_n = 0$

$1 < l < +\infty$

Fisso $\varepsilon = \frac{l-1}{2}$ $\exists \bar{n} : \forall n > \bar{n}$ $1 < \frac{1+l}{2} = 1 + \varepsilon < \sqrt[n]{a_n}$

" " " $\left(\frac{1+l}{2}\right)^n < a_n$

" " " $\downarrow n \rightarrow +\infty$ $\downarrow n \rightarrow +\infty$

1 +∞

e quindi per il Teorema del confronto $\lim_n a_n = +\infty$

$l = +\infty$

Fissato $\pi > 0$ $\exists \bar{n} > 0 : \forall n > \bar{n}$ $1 < 2 < \sqrt[n]{a_n}$

e quindi si conclude come nel caso $1 < l < +\infty$

Il criteri della radice e del rapporto sono legati tra loro, in quanto vale il seguente

Teorema ($a_{n+1}/a_n \rightarrow l \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} \rightarrow l$)

Dato $\{a_n\}_m : a_n > 0 \forall n$

Se $\exists \lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ allora $\exists \lim_n \sqrt[n]{a_n} = l$
dimo (riassunto)

Sia $0 < l < +\infty$. Per ipotesi, preso $\varepsilon: l - \varepsilon > 0$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} : \forall n > \bar{n} \quad 0 < l - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < l + \varepsilon$

Procedendo come nella dim. del criterio del rapporto si ottiene

$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} \quad \forall n > \bar{n} \quad (l - \varepsilon)^n \cdot \frac{a_{\bar{n}}}{(l - \varepsilon)^{\bar{n}}} < a_n < (l + \varepsilon)^n \cdot \frac{a_{\bar{n}}}{(l + \varepsilon)^{\bar{n}}}$

" " " $(l - \varepsilon) \cdot \sqrt[n]{\frac{a_{\bar{n}}}{(l - \varepsilon)^{\bar{n}}}} < \sqrt[n]{a_n} < (l + \varepsilon) \sqrt[n]{\frac{a_{\bar{n}}}{(l + \varepsilon)^{\bar{n}}}}$

portando al limite, per il Teorema dei 2 carabinieri

$\forall \varepsilon > 0 \quad l - \varepsilon < \left[\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} \right] < l + \varepsilon$

e per l'arbitrarietà di $\varepsilon \quad \lim_n \sqrt[n]{a_n} = l \quad \checkmark$

N.B. $\lim_n \sqrt[n]{\frac{a_{\bar{n}}}{(l + \varepsilon)^{\bar{n}}}} = 1 = \lim_n \sqrt[n]{\frac{a_{\bar{n}}}{(l - \varepsilon)^{\bar{n}}}}$

OSSERVAZIONE : Il caso $l = 1$ è indecidibile

$a_n = n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty \quad e \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$

$a_n = \frac{1}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0^+ \quad e \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$

dunque non si può concludere nulla quando

$\sqrt[n]{a_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$

|||
o o o

Esercizio: Calcolare $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n$ (utilizzare il criterio del rapporto)

$$Q_n = q^n \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{q^{n+1}}{q^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} q = q$$

Se $q > 1$ allora (Criterio Rapporti) $q^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$

Se $0 < q < 1$ allora (" ") $q^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$



oss: Si poteva utilizzare pure il criterio della radice: $\sqrt[n]{q^n} = q \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} q$

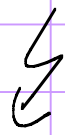
Esercizio: Calcolare
lim.
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$$

Bisogna Tenere conto del $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \in]2,3[$

Posto $Q_n = \frac{n!}{n^n}$ si ha

$$\begin{aligned} \frac{Q_{n+1}}{Q_n} &= \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{\cancel{n!} \cdot (n+1)}{(n+1)^n \cdot \cancel{(n+1)}} \cdot \frac{n^n}{\cancel{n!}} = \\ &= \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e} \end{aligned}$$

Π_4 $\frac{Q_{n+1}}{Q_n} \xrightarrow{n} \frac{1}{e} \xRightarrow{\text{Teorema}} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e}$ 

Esercizio Calcolare $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n)!}{2 \cdot (n!)^2}$

dim

1° modo (con il criterio del rapporto)

$$Q_n = \frac{(2n)!}{2 \cdot (n!)^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{Q_{n+1}}{Q_n} &= \frac{(2n+2)!}{(n+1)! \cdot 2} \cdot \frac{n! \cdot 2}{(2n)!} = \\ &= \frac{\cancel{(2n)!} \cdot (2n+1) \cdot (2n+2)}{\cancel{n!} \cdot (n+1) \cdot \cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{n!} \cdot \cancel{2}}{\cancel{(2n)!}} = \\ &= \frac{(2n+1) \cdot 2 \cdot \cancel{(n+1)}}{\cancel{(n+1)}} = 2 \cdot (2n+1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \end{aligned}$$

Criterio Rapporto

$$\Rightarrow \exists \lim_n Q_n = +\infty$$

10 $\rightarrow$ 19

2° modo (diretto) $Q_n = \frac{(2n)!}{n! \cdot 2}$

$$Q_n = \frac{\cancel{n!} \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot \dots \cdot \cancel{(2n)}}{\cancel{n!} \cdot \cancel{2}} = n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot \dots \cdot (2n-1) \geq \underbrace{M^n}_{\downarrow +\infty}$$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} Q_n = +\infty$

Esercizio: Calcolare $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt[3]{1-\frac{2}{n}} - \sqrt[3]{1-\frac{3}{n}} \right)$
dire

È una forma indeterminata $\infty \cdot 0$!

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = (a^3-b^3)$$

$$a = \left(1-\frac{2}{n}\right)^{1/3} \quad b = \left(1-\frac{3}{n}\right)^{1/3} \quad \text{e il limite diventa}$$

$$\lim_n n \left(\left(1-\frac{2}{n}\right)^{1/3} - \left(1-\frac{3}{n}\right)^{1/3} \right) \cdot \frac{\left[\left(1-\frac{2}{n}\right)^{2/3} + \left(1-\frac{2}{n}\right)^{1/3} \left(1-\frac{3}{n}\right)^{1/3} + \left(1-\frac{3}{n}\right)^{2/3} \right]}{\left[\left(1-\frac{2}{n}\right)^{2/3} + \left(1-\frac{2}{n}\right)^{1/3} \left(1-\frac{3}{n}\right)^{1/3} + \left(1-\frac{3}{n}\right)^{2/3} \right]}$$

$$= \lim_n n \frac{1-\frac{2}{n} - 1 + \frac{3}{n}}{\left(1-\frac{2}{n}\right)^{2/3} + \left(1-\frac{2}{n}\right)^{1/3} \left(1-\frac{3}{n}\right)^{1/3} + \left(1-\frac{3}{n}\right)^{2/3}} =$$

$$= \lim_n \frac{1}{\left(1-\frac{2}{n}\right)^{2/3} + \left(1-\frac{2}{n}\right)^{1/3} \left(1-\frac{3}{n}\right)^{1/3} + \left(1-\frac{3}{n}\right)^{2/3}} = \frac{1}{3} \quad \checkmark$$

Esercizio: Calcolare $\lim_n \sqrt[n]{n}$
dire

Preso $Q_n = n$ si ha che $\lim_n \frac{Q_{n+1}}{Q_n} = \lim_n \frac{n+1}{n} = 1$

Se $\frac{Q_{n+1}}{Q_n} \rightarrow 1$ allora $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1 \quad \checkmark$

Esercizio! Calcolare $\lim_m (\sqrt[m]{m} - 1)^m$

dim
Ponendo $Q_m = (\sqrt[m]{m} - 1)^m$

$\sqrt[m]{Q_m} = (\sqrt[m]{m} - 1) \xrightarrow[m \rightarrow +\infty]{} 0$

Per l'esercizio precedente
↓

Se $\sqrt[m]{Q_m} \rightarrow 0 < 1$ allora $Q_m = (\sqrt[m]{m} - 1)^m \xrightarrow[m \rightarrow +\infty]{} 0$ ✓

Esercizio: Calcolare $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(\sqrt[n]{n} - 1)$
ovvero

$\infty \cdot 0$ ovvero indeterminato

$$\sqrt[n]{n} - 1 = n^{\frac{1}{n}} - 1 = e^{\frac{1}{n} \cdot \log n} - 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ora } e^x = 1 + x + o(x) \quad x \rightarrow 0 \\ \text{inoltre } \frac{\log n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} e^{\frac{\log n}{n}} - 1 &= \cancel{1} + \frac{\log n}{n} + o\left(\frac{\log n}{n}\right) - \cancel{1} \quad n \rightarrow +\infty \\ &= \frac{\log n}{n} + o\left(\frac{\log n}{n}\right) \quad n \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

Donque

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot (\sqrt[n]{n} - 1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\frac{\log n}{n} + o\left(\frac{\log n}{n}\right) \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \cancel{n} \cdot \frac{\log n}{\cancel{n}} \left(1 + o(1) \right) = +\infty$$

Esercizio: Sia $-5 \leq a_n \leq 3 \quad \forall n$. Quale Tra le seguenti affermazioni è VERA?

(i) $-5 \leq |a_n| \leq 3$ **FALSA**

(ii) $\inf a_n = -5$ **FALSA** $a_n = 1 \quad \forall n$ soddisfa le ipotesi
ma $\inf a_n = \min a_n = 1$

(iii) $a_n a_{n+1} \leq 25$ **VERA**

(iv) $\max a_n = 3$ **FALSA** $a_n = 1 \quad \forall n$ soddisfa
l'ipotesi $\max a_n = 1 < 3$

(i) è FALSA poiché si può

$$a_n = -5 \quad \forall n$$

in che caso $|a_n| = |-5| > 3$

(iv) $-5 \leq a_n \leq 3 \quad \forall n$

$$\Rightarrow 0 \leq |a_n| \leq \max \{|-5|, |3|\} = 5$$

$$a_n \cdot a_{n+1} \leq |a_n| \cdot |a_{n+1}| \leq 5^2 = 25 \quad \text{✓}$$

Esercizio: Siano date due successioni $\{a_n\}_n$ e $\{b_n\}_n$ t.c.

$\lim_n n^2 a_n = 0$ e $\lim_n n^3 b_n = 0$. Quale Tra le seguenti affermazioni è FALSA?

(i) $\lim_n (a_n + b_n) = 0$ **VERA**

(ii) $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = 0$

(iii) $\lim_n n(a_n - b_n) = 0$ **VERA**

(iv) $\lim_n n^4 a_n b_n = 0$ **VERA**

$$\lim_n n^2 a_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n^2}} = 0 \Leftrightarrow a_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad n \rightarrow +\infty$$

$$\lim_n n^3 b_n = 0 \Leftrightarrow \lim_n \frac{b_n}{\frac{1}{n^3}} = 0 \Leftrightarrow b_n = o\left(\frac{1}{n^3}\right) \quad n \rightarrow +\infty$$

$$\lim_n n^4 \cdot a_n \cdot b_n = \lim_n \frac{1}{n} \cdot n^5 \cdot a_n b_n$$

$$= \lim_n \frac{1}{n} \cdot \frac{a_n}{\frac{1}{n^2}} \cdot \frac{b_n}{\frac{1}{n^3}} = \lim_n \frac{1}{n} \cdot \lim_n \frac{a_n}{\frac{1}{n^2}} \cdot \lim_n \frac{b_n}{\frac{1}{n^3}} \\ = 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$$

Devo provare che $\exists a_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ $b_n = o\left(\frac{1}{n^3}\right)$
t.c. $n \rightarrow +\infty$

$$\lim_n \frac{a_n}{b_n} \neq 0$$

$$a_n = \frac{1}{n^3}$$

$$b_n = \frac{1}{n^4}$$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^4}} = n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \neq 0$$