Lezione 22 - Analisi Matematica 1 - 11 novembre 2013

Successioni di numeri reali

Esempio $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{1/(n+1)\}_{n\in\mathbb{N}} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, 1/n, \dots\}$

ovvero risulta individuata una funzione

$$a_{(\cdot)} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \longmapsto a_n = \frac{1}{n+1}$$

Si osservi che questa funzione è continua $\forall n \in \mathbb{N}$

Esempio $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\frac{1+(-1)^n}{2}\right\}_{n\in\mathbb{N}} = \{1, 0, 1, 0, 1, \dots, (-1)^n, \dots\}$

ovvero $a_{(\cdot)} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$n \longrightarrow a_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$$

Esempio (non è una successione)

$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{P}} = \left\{\frac{1}{1+(-1)^n}\right\}_{n\in\mathbb{P}} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}, \dots\right\}$$

Non è una successione poiché è definita su $\mathbb{P}$!!!

Esempio Data la successione $\{a_n\}_{n\geq 1} = \{1/n\}_{n\geq 1}$
possiamo considerare una nuova successione

$$c_n := a_{3n-2}$$

ovvero $n \longmapsto 3n-2 \longmapsto a_{3n-2} = c_n$

$$\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{a_1; a_4; a_7; \dots; a_{3n-2}; \dots\} = \{1; \tfrac{1}{4}; \tfrac{1}{7}; \dots; \tfrac{1}{3n-2}; \dots\}$$

$$\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \longmapsto 3n-2 \longmapsto a_{3n-2} = c_n$$

Def: $S \subseteq \mathbb{N}$ viene detto "Semiretta in $\mathbb{N}$" se $\exists\, a>0 : S = \mathbb{N} \cap]a,+\infty[$

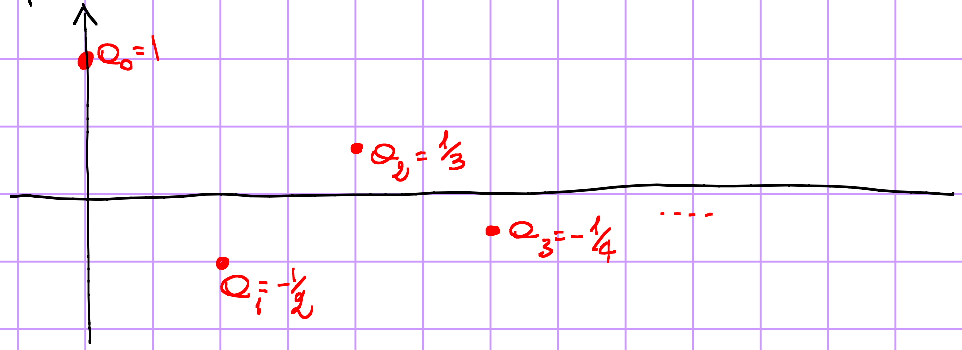
Esempio: ① $S = \{ n \in \mathbb{N} : n > 11\} = \{12, 13, 14, \dots\}$
$= \mathbb{N} \cap]11,+\infty[$ è una semiretta in $\mathbb{N}$

② $\mathbb{P} = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$ = insieme dei numeri pari
non è una semiretta in $\mathbb{N}$

Def: (successione numeri reali)
Si dice "successione di numeri reali" una qualsiasi funzione $f : S \to \mathbb{R}$, dove S è una semiretta in $\mathbb{N}$.
Si pone per convenzione $f(n) = a_n$ $\forall n$ e si scrive
$\{a_n\}_{n \in S}$ ← sta a indicare la successione

Oss: Data $f : A \to \mathbb{R}$, il grafico di f è $\{(x, f(x)) : x \in A\}$
Nel caso di una successione, la si indica con
$\{a_n\}_{n \in S}$
ovvero con l'insieme dei suoi valori!

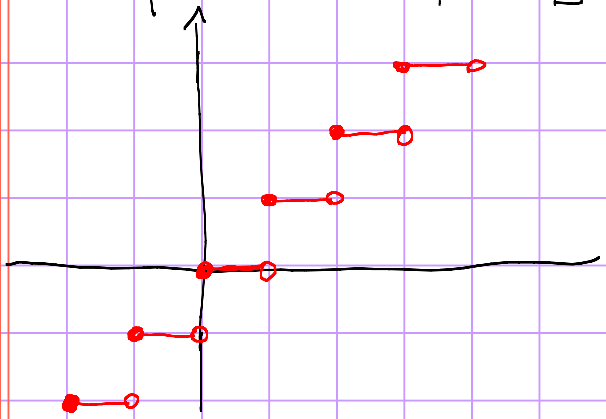
Esempio (rappresentazione grafica)
Data $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{(-1)^n/(n+1)\}_{n \in \mathbb{N}}$, se si vuole rappresentarla graficamente



Def (parte intera di un n.ro reale)

Dato un qualsiasi $x \in \mathbb{R}$, si dice "parte intera di x" e si indica con $\lfloor x \rfloor$, il più grande intero minore o uguale a x ovvero $\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$

Esempio: $\lfloor 4{,}5 \rfloor = 4$ $\quad \lfloor -2{,}1 \rfloor = -3$



Si osserva che

- $\lfloor \lfloor x \rfloor \rfloor = \lfloor x \rfloor \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $f(x) = \lfloor x \rfloor$ è continua $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, e per ogni $x_0 \in \mathbb{Z}$ si ha

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lfloor x_0 \rfloor - 1 < \lfloor x_0 \rfloor = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

- $\forall k \in \mathbb{Z}$ e $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ $\quad \lfloor x_0 + k \rfloor = \lfloor x_0 \rfloor + k$

Oss: Essendo $\{a_n\}_n$ una funz continua $\forall n \in \mathbb{N}$ (con punti isolati), l'unico comportamento "interessante" di $\{a_n\}_n$ è quello a $+\infty$, e infatti si studia solo il $\lim_{n \to +\infty} a_n$

Oss: $+\infty$ è l'unico p.d.a di $\mathbb{N}$.

Verso la def di Limite di Successione

Dalla def. data per le funzioni, $\lim_{n \to +\infty} a_n = \ell \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

dove $\{a_n\}_{n \in S}$, con $S = \{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\}$, si scrive

$$(*) \quad \forall U \in \mathcal{I}_\ell \quad \exists V \in \mathcal{I}_{+\infty} : \forall n \in V \cap S \quad a_n \in U$$

Se $V =]a, +\infty[$, $l \in \mathbb{R}$ allora posto $\bar{n} = \max\{n_0, [a]\}$ si ha

(**) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} > 0 : \forall n > \bar{n} \quad a_n \in]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$

Quando $l = +\infty$, $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty$ diventa

$\forall M \in \mathbb{R} \ \exists \bar{n} > 0 : \forall n > \bar{n} \quad a_n > M$

Quando $l = -\infty$, $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = -\infty$ diventa

$\forall M \in \mathbb{R} \ \exists \bar{n} > 0 : \forall n > \bar{n} \quad a_n < M$

Def $\left(\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = l \in \overline{\mathbb{R}} \right)$

Data $\{a_n\}_{n \in S}$ dove S semiretta in $\mathbb{N}$, si dice che $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = l \in \overline{\mathbb{R}}$ se

$\forall U \in \mathcal{I}_l \ \exists \bar{n} > 0 : \forall n > \bar{n} \quad a_n \in U$

Oss: Al solito, questa definizione di limite permette di VERIFICARE che l sia il limite.
Il calcolo del limite va fatto in un altro modo.

Esempio Verificare (via la definizione) che

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

dim

$\Leftrightarrow$ eq. $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{n}{n+1} - 1 \right) = 0$

$\Leftrightarrow$ eq. $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{n - n - 1}{n+1} \right) = 0$

$\Leftrightarrow$ eq. $-\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ e si deve provare

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} : \forall n > \bar{n} \quad -\varepsilon < \frac{1}{n+1} < \varepsilon$

" " " $\quad 0 < \frac{1}{n+1} < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} : \forall n > \bar{n}$ $\qquad \frac{1}{\varepsilon} < (n+1)$

" " " $\qquad \frac{1}{\varepsilon} - 1 < n$

preso $\bar{n} = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor$ si ha

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor : \forall n > \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor \qquad \frac{1}{\varepsilon} - 1 \leq \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1 - 1 < n$

ovvero la Tesi

Anche per le successioni il limite, quando $\exists$, è unico.

Anche per i limiti di successioni vale il Teorema algebrico

$\lim_n (a_n + b_n) = \lim_n a_n + \lim_n b_n$ (Tranne il caso $+\infty - \infty$)

$\lim_n (a_n \cdot b_n) = \lim_n a_n \cdot \lim_n b_n$ (" " " $0 \cdot \infty$)

$\lim_n \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_n a_n}{\lim_n b_n}$ $\qquad (b_n \neq 0 \ \forall n)$

Valgono i Teoremi del confronto

$a_n \leq b_n \quad \exists \lim_n a_n = l \ \lim_n b_n = m \implies l \leq m$

$a_n \leq b_n \quad \exists \lim_n a_n = +\infty \implies \exists \lim_n b_n = +\infty$

$a_n \leq b_n \quad \exists \lim_n b_n = -\infty \implies \exists \lim_n a_n = -\infty$

$a_n \leq b_n \leq c_n \quad \exists \lim_n a_n = \lim_n c_n = l \implies \exists \lim_n b_n = l$

Vale poi il Teorema (successione limitata) $\times$ (successione infinitesima) $=$ (successione infinitesima)

$\{a_n\}_{n \in S}$ successione limitata
$\{b_n\}_{n \in S'}$ " infinitesima

$\implies a_n \cdot b_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ ovvero $\{a_n b_n\}_{n \in S \cap S'}$ è successione infinitesima

Adesso tutti i risultati provati per i limiti di funzioni si traducono in opportuni limiti di successioni in quanto

Teorema ($\lim_{x \to x_0} f = l \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f_{|B} = l$ quando x_0 p.d.a. per B)

Sia $f: A \to \mathbb{R}$ con x_0 p.d.a. per A

" $B \subseteq A$ con x_0 " " B

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ allora $\lim_{x \to x_0} f_{|B}(x) = l$

Esercizio Calcolare $\lim_{n \to +\infty} n \operatorname{sen} 1/n$

dim.

Proviamo a calcolare, passando a variabile continua

$$\lim_{y \to \infty} y \operatorname{sen} \frac{1}{y} = \lim_{y \to +\infty} \frac{\operatorname{sen} 1/y}{1/y} = \lim_{z \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} z}{z} = 1$$

cambio variabile $z = 1/y$

Presa $f(y) = y \operatorname{sen} 1/y$, $f:]0, +\infty[\to \mathbb{R}$,
abbiamo provato che $\lim_{y \to +\infty} f(y) = 1$

ma $\mathbb{N} \setminus \{0\} \subseteq]0, +\infty[$ con $+\infty$ p.d.a. per $\mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$\Rightarrow \lim_{y \to +\infty} f_{|\mathbb{N} \setminus \{0\}}(x) = \lim_{n \to +\infty} f(n) = \lim_{n \to +\infty} n \operatorname{sen} 1/n = 1$$

Esercizio Calcolare $\lim_{n} n^2\left(1-\cos \frac{1}{n}\right)$

dim.

Si osserva che $\lim_{y\to+\infty} y^2\left(1-\cos\frac{1}{y}\right) \overset{z=1/y}{=} \lim_{z\to0^+} \frac{1-\cos z}{z^2} = \frac{1}{2}$

dunque $f(y) = y^2\left(1-\cos\frac{1}{y}\right) \xrightarrow[y\to+\infty]{} \frac{1}{2}$

Preso $\mathbb{N}\setminus\{0\}$, $+\infty$ è di accumulazione per $\mathbb{N}\setminus\{0\}$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f_{|\mathbb{N}\setminus\{0\}}(x) = \lim_{n\to+\infty} f(n) = \lim_{n\to+\infty} n^2\left(1-\cos\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$$

Esercizio: Calcolare $\lim_{n\to+\infty} n^2\left(e^{1/n^2}-1\right)$

dim

$$\lim_{y\to+\infty} y^2\left(e^{1/y^2}-1\right) \overset{z=1/y^2}{=} \lim_{z\to0^+} \frac{e^z-1}{z} = 1$$

Quindi posto $f(y) = y^2\left(e^{1/y^2}-1\right)$

considero $\mathbb{N}\setminus\{0\}$: $+\infty$ è p.d.a. per $\mathbb{N}\setminus\{0\}$

Quindi $\lim_{y\to+\infty} f_{|\mathbb{N}\setminus\{0\}}(y) = \lim_{n\to+\infty} f(n) = \lim_{n} n^2\left(e^{1/n^2}-1\right) = 1$

Sottosuccessioni

Prese $\{a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\}$

scegliamo un sottoinsieme con ∞ termini

$\{a_0, a_2, a_4, \ldots, a_{2n}, \ldots\}$

Posto $b_n = a_{2n}$ si ha $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{b_0, b_1, \ldots, b_n, \ldots\}$

$= \{a_0, a_2, \ldots, a_{2n}, \ldots\}$

Questa $\{b_n\}_n$ è una successione, e relativamente ad $\{a_n\}_n$ risulta essere una "successione estratta da $\{a_n\}_n$"
ovvero una "sottosuccessione di $\{a_n\}_n$"

Per individuare $\{b_n\}_n$ è stato necessario individuare
$k_n = 2n \quad k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strettamente crescente

Teorema ($k: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strett. crescente $\Rightarrow k(n) \geq n \ \forall n \in \mathbb{N}$)
Sia $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strettamente crescente
$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \ k(n) \geq n$

dim

$n=0 \quad k(0) \in \mathbb{N} \Rightarrow k(0) \geq \min \mathbb{N} = 0$ ovvero $k(0) \geq 0$ ok

$n \quad k(n) \geq n$ (ipotesi induttiva)

$n+1 \quad k(n+1) \geq n+1$ (la tesi da provare

$$\underbrace{k(n+1) > k(n)}_{k \text{ è strett. crescente}} \underbrace{\geq n}_{\text{Hip. induttiva}} \overset{(*)}{\Rightarrow} k(n+1) \geq (n+1)$$

Oss: per capire (*) si osservi che
$$\{x \in \mathbb{N} : x > 5\} = \{x \in \mathbb{N} : x \geq 6\}$$

Oss: Il Teorema precedente NON VALE per funzioni $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
ad esempio $f(x) = \operatorname{arctg} x$ allora
si ha che $\operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3} < \sqrt{3}$

Def (sottosuccessione di $\{a_n\}_n$)
Data $\{a_n\}_n$ succ. reale, una successione $\{b_n\}_n$ si dice "sottosuccessione di $\{a_n\}_n$" (o successione estratta)
se $\exists\, k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strettamente crescente t.c.
$$b_n = a_{k_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Esempio Data $\{a_n\}_n = \left\{(-1)^n \cdot \frac{1}{n+1}\right\}_n$ possiamo considerare

$k_n = 2n$ $\quad k: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strett. crescente individua

$$b_n = a_{k_n} = (-1)^{2n} \cdot \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{2n+1} \qquad \{b_n\}_n = \{a_{2n}\}_n = \left\{\frac{1}{2n+1}\right\}_n$$

$h_n = 2n+1$ $\quad h: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strett. crescente individua

$$c_n = a_{h_n} = (-1)^{2n+1} \cdot \frac{1}{2n+2} = -\frac{1}{2n+2} \qquad \{c_n\}_n = \{a_{2n+1}\}_n = \left\{-\frac{1}{2n+2}\right\}_n$$

Teorema $\left(a_n \xrightarrow[n]{} \ell \Rightarrow a_{k_n} \xrightarrow[n]{} \ell\right)$

Sia $\{a_n\}_n$ una successione reale.

Se $\lim_n a_n = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ allora $\lim_n a_{k_n} = \ell$
$\forall k: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strettamente crescente

dim

$$\begin{cases} \forall U \in \mathcal{J}_\ell \quad \exists \bar{n} > 0 \ : \ \forall n > \bar{n} \quad a_n \in U \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad k_n \geq n \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$\forall U \in \mathcal{J}_\ell \quad \exists \bar{n} > 0 \ : \ \forall n > \bar{n} \quad k_n \geq n > \bar{n} \quad a_{k_n} \in U$

ovvero $\lim_n a_{k_n} = \ell$

Risulta così provato pure il seguente

Teorema (contronominale del precedente teorema)

Sia $\{a_n\}_n$ una successione reale.

Se $\exists k, h: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strettamente crescenti t.c.

$$\lim_n a_{k_n} = \ell \neq m = \lim_n a_{h_n}$$

allora $\nexists \lim_n a_n$

OSS: Essendo $k_n = n$ una funzione strettamente crescente, ne segue che $\{a_n\}_n$ è sottosuccessione di $\{a_n\}_n$

Esempio: Provare che $\nexists \lim_n a_n$, dove $\{a_n\}_n = \{(-1)^n \cdot n\}_n$

dim

$k: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $k_n = 2n$ strett. crescente $\{a_{k_n}\}_n = \{(-1)^{2n} \cdot 2n\}_n = \{2n\}_n$

$h: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $h_n = 2n+1$ " " $\{a_{h_n}\}_n = \{(-1)^{2n+1}(2n+1)\} = \{-(2n+1)\}_n$

$$\lim_n a_{h_n} = -\infty \neq +\infty = \lim_n a_{k_n}$$

e dunque $\nexists \lim_n a_n$ $\lightning$

Esempio:

Data la successione $\{a_n\}_n = \left\{(-1)^n \cdot \frac{n+2}{n+1}\right\}_n$

$= \left\{2; -\frac{3}{2}; \frac{4}{3}; -\frac{5}{4}; \frac{6}{5}; \dots\right\}$

provare che $\nexists \lim_n a_n$

dim

si possono considerare $\{a_{2n}\}_n = \left\{\frac{2n+2}{2n+1}\right\}_n$

$\{a_{2n+1}\}_n = \left\{-\frac{2n+1+2}{2n+1+1}\right\} = -\left\{-\frac{2n+3}{2n+2}\right\}$

ovvero considerare $k_n = 2n$ strettamente crescente

$h_n = 2n+1$ " "

Si ha $\lim_n a_{h_n} = -1 \neq 1 = \lim_n a_{k_n}$ $\lightning$

Esempio: Data $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $\quad a_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

$$\{a_n\}_n = \{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$$
$$= \{1, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \dots, (-1)^n\tfrac{1}{n}, \dots\}$$

$$\{b_n\}_n = \{1, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{5}, \dots, \tfrac{1}{2n+1}, \dots\} = \{a_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}}$$

$$\{c_n\}_n = \{-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{4}, -\tfrac{1}{6}, \dots, -\tfrac{1}{2n}\} = \{a_{2n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}$$

$a_{2n} = a_{k_n}$ $\qquad k: \mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $\; n\mapsto k_n = 2n$ $\qquad k$ strettamente crescente

$a_{2n+1} = a_{h_n}$ $\qquad h: \mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $\; n\mapsto h_n = 2n+1$ $\qquad h$ strettamente crescente

Esercizio: Provare che $\nexists \lim_{n\to\infty} (-1)^n$

dim

1° modo:

Posto $a_n = (-1)^n \ \forall n \in \mathbb{N}$, nei posti pari troviamo $+1$

" " dispari " -1

Preso $k_n = 2n$, $k: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\{a_{2n}\}_n = \{1\}_n$ $a_{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

$h_n = 2n+1$, $h: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\{a_{2n+1}\} = \{-1\}_n$ $a_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1$

Quindi $\nexists \lim_{n\to+\infty} a_n$

2° modo:

Per provare che $\nexists \lim_{n\to+\infty} a_n$, bisogna prendere un $\forall \ell \in \mathbb{R}$

e provare che non $(\lim_n a_n = \ell)$

$\ell \geq 0$: proviamo che

$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \bar{n} > 0 \ \exists \tilde{m} > \bar{m} : |a_{\tilde{m}} - \ell| \geq \varepsilon_0$

$\varepsilon_0 = \frac{1}{2} : \forall \bar{n} > 0 \ \exists \tilde{n} = 2\bar{n}+1 : |a_{2\bar{n}+1} - \ell| = |(-1)^{2n+1} - \ell| = |-1-\ell| = \ell+1 \geq 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon_0$

$\ell < 0$

$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \bar{n} > 0 \ \exists \tilde{n} > \bar{n} : |a_{\tilde{n}} - \ell| \geq \varepsilon_0$

$\exists \varepsilon_0 = \frac{1}{2} \quad \forall \bar{n} > 0 \ \exists \tilde{n} = 2\bar{n} : |a_{2\bar{n}} - \ell| = |(-1)^{2\bar{n}} - \ell| = |1-\ell| = 1-\ell \geq 1 > \frac{1}{2}$ ↯

Problema: Se $a_{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$ e $a_{2n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$,

posso concludere $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$?

Sì, poichè $\{a_{2n}\}_n \cup \{a_{2n+1}\}_n = \{a_n\}_n$

ovvero le due sottosuccessioni "riempiono"

tutta $\{a_n\}_n$

Teorema (successioni che riempiono $\{a_n\}_n$)

Data $\{a_n\}_{n\in S}$ successione reale,

se $\exists\, k:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ $h:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ strettamente crescenti t.c.

i) $k(\mathbb{N})\cup h(\mathbb{N}) = S$

ii) $\lim_n a_{k_n} = \lim_n a_{h_n} = \ell$

allora $\exists \lim_n a_n = \ell$

Esempio: Sia $a_n = 1+\frac{(-1)^n}{n}$. Provare che $\exists \lim_n a_n$

dim

$$a_{2n} = 1+\frac{(-1)^{2n}}{2n} = 1+\frac{1}{2n} \xrightarrow[n]{} 1 \quad \text{decrescendo}$$

$$a_{2n+1} = 1+\frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} = 1-\frac{1}{2n+1} \xrightarrow[n]{} 1 \quad \text{crescendo}$$

$$\{2\mathbb{N}\}\cup\{2\mathbb{N}+1\} = \mathbb{N}$$

e dunque $\exists \lim_n a_n = 1$

Attenzione: se non vale l'ipotesi $k(\mathbb{N})\cup h(\mathbb{N}) = S$

allora non è detto $\exists \lim_n a_n$

Esempio Data $\{a_n\}_n$, si supponga

$\lim_n a_{3n} = \ell = \lim_n a_{3n+1}$ $\ell\neq 0$

0 1 3 4 6 7 9 10 12 13
2 5 8 11 14
15 16 17
3n+2

dove $a_n = \begin{cases} \ell & n=0,3,6,9,12,\dots \\ \ell & n=1,4,7,10,13,\dots \\ -\ell & n=2,5,8,11 \end{cases}$

si ha che $\lim_n a_{3n+2} = -\ell \neq \ell$, ovvero la successione non converge!

Teorema

$\{a_n\}_n$ successione reale.

$\exists\ k, h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strettamente crescenti

- 1) $k(\mathbb{N}) \cup h(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$ $\leftarrow \{a_n\}_n = \{a_{k_n}\}_n \cup \{a_{h_n}\}_n$
- 2) $\lim_{n\to+\infty} a_{k_n} = \lim_{n\to\infty} a_{h_n} = l$

allora $\lim_{n\to+\infty} a_n = l$

dim (facoltativa)

Supponiamo $l \in \mathbb{R}$

Tesi $\forall \varepsilon > 0\ \exists \bar{n} : \forall n > \bar{n} \quad l-\varepsilon < a_n < l+\varepsilon$

Hip. $\begin{cases} \forall \varepsilon > 0\ \exists n_1 : \forall n > n_1 & l-\varepsilon < a_{k_n} < l+\varepsilon \\ \quad '' \quad \exists n_2 : \forall n > n_2 & l-\varepsilon < a_{h_n} < l+\varepsilon \end{cases}$

$\bar{n} = \max\{k_{n_1}, h_{n_2}\}$ essendo $h(\mathbb{N}) \cup k(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$

$\forall n > \bar{n} \quad n \in h(\mathbb{N}) \cup k(\mathbb{N})$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \bar{n} : \forall n > \bar{n}$ ① ②

① $\exists m : n = k_m > \bar{n} \geq k_{n_1} \Rightarrow m > n_1 \Rightarrow \quad l-\varepsilon < a_{k_m} = a_n < l+\varepsilon$

② $\exists s : n = h_s > \bar{n} \geq h_{n_2} \Rightarrow s > n_2 \Rightarrow \quad l-\varepsilon < a_{h_s} = a_n < l+\varepsilon$

$\Downarrow$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \bar{n} > 0 : \forall n > \bar{n} \quad l-\varepsilon < a_n < l+\varepsilon \quad$ ↯

A titolo di esercizio riportiamo la dimostrazione del Teorema dei 2 Carabinieri, anche se questo Teorema segue dall'analogo risultato provato per le funzioni!

Teorema (dei due carabinieri)

Date $\{a_n\}_n$ $\{b_n\}_n$ $\{c_n\}_n$ successioni reali t.c.

1) $\exists \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = \ell \in \underline{\underline{\mathbb{R}}}$

2) $a_n \leq b_n \leq c_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

allora $\exists \lim_{n\to+\infty} b_n = \ell$

dim

Dall'ipotesi, supponendo $\ell \in \mathbb{R}$ (altrimenti è sufficiente il Teorema confronto)

$$\begin{cases} \forall \varepsilon>0 \ \exists \bar{n}_1>0 : \forall n>\bar{n}_1 \quad \ell-\varepsilon<a_n<\ell+\varepsilon \\ \quad " \quad \exists \bar{n}_2>0 : \forall n>\bar{n}_2 \quad \ell-\varepsilon<c_n<\ell+\varepsilon \\ \qquad \forall n \quad a_n \leq b_n \leq c_n \end{cases}$$

posto $\bar{n} = \max\{\bar{n}_1, \bar{n}_2\}$, si ha

$$\Downarrow$$

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists \bar{n}>0 : \forall n>\bar{n} \quad \begin{cases} \ell-\varepsilon<a_n<\ell+\varepsilon \\ \ell-\varepsilon<c_n<\ell+\varepsilon \\ a_n \leq b_n \leq c_n \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists \bar{n}>0 : \forall n>\bar{n} \quad \ell-\varepsilon<a_n\leq b_n\leq c_n<\ell+\varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists \bar{n}>0 : \forall n>\bar{n} \quad \ell-\varepsilon<b_n<\ell+\varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \ell \ (\neq +\infty)$$

Esercizio Provare che

1) $\lim_{n\to+\infty} a_n = l \implies \lim_{n\to+\infty} |a_n| = |l|$

2) $\lim_{n\to+\infty} |a_n| = l \not\Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = l$

3) $\lim_{n\to+\infty} |a_n| = 0$ **se** $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

$1/{+\infty} = 0^+$

Aperta parentesi

Proviamo che $\lim_{x\to 0^+} 1/x = +\infty$

Si $\forall M\in\mathbb{R}\ \exists\delta>0 : 0<x<\delta \implies M < 1/x$

possiamo prendere $M>0$

Hp. $\forall M>0\ \exists\delta>0 : 0<x<\delta \implies \frac{1}{M} > x > 0$

e questo è vero se prendo $\delta = 1/M$ $\quad \delta=\delta(M)$

$\forall M>0\ \exists\delta=1/M>0 : 0<x<1/M \implies \frac{1}{M}>x$ $\quad$ C

Si è provato che

$$\lim_{x\to+\infty} q^x = \begin{cases} +\infty, \text{ se } q>1 \\ 1, \text{ se } q=1 \\ 0, \text{ se } 0\le q<1 \end{cases} \implies$$

Se ne deduce

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & q>1 \\ 1 & q=1 \\ 0 & 0\le q<1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{q^x}{x^k} = \begin{cases} +\infty, \text{ se } q>1 & \forall k\in\mathbb{N} \\ 0, \text{ se } q=1 & \forall k\ge 1 \\ 0, \text{ se } 0\le q<1 & \forall k\in\mathbb{N} \end{cases} \implies \lim_{n\to+\infty} \frac{q^n}{n^k} = \begin{cases} +\infty, \text{ se } q>1 & \forall k\in\mathbb{N} \\ 0, \text{ se } q=1 & \forall k\ge 1 \\ 0, \text{ se } 0\le q<1 & \forall k\in\mathbb{N} \end{cases}$$

Esercizio: provare, in modo diretto, che

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} +\infty, & \text{se } q>1 \\ 1, & \text{se } q=1 \\ 0, & \text{se } 0\le q<1 \end{cases}$$

dim

$q=1$ è ovvio $\quad 1^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

$q=0$ " " $\quad 0^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$q>1 \Rightarrow \exists\, \varepsilon>0 : q=1+\varepsilon \Rightarrow q^n=(1+\varepsilon)^n \overset{\text{disuguaglianza Bernoulli}}{>} \underbrace{1+n\varepsilon}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty}$

$\Rightarrow$ (per il Teorema Confronto) $\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$

$0<q<1 \Rightarrow \frac{1}{q}>1 \Rightarrow \exists\, \varepsilon>0 : \frac{1}{q}=1+\varepsilon$

$\Rightarrow \frac{1}{q^n}=(1+\varepsilon)^n \overset{\text{Disuguaglianze Bernoulli}}{>} \underbrace{1+n\varepsilon}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty}$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{q^n}=+\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} q^n = 0^+$

c.v.d.

Criterio del rapporto e della radice

Andiamo a provare i criteri della radice e del rapporto: entrambi poggiano la dimostrazione sul confronto della successione $\{a_n\}$ in esame con $\{q^n\}$, dove $q>0$.

Teorema (Criterio del rapporto)

Sia $\{a_n\}_{n\in S}$ una successione reale con $a_n>0\ \forall n$

Si supponga che esista $\ell = \lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n}$

Se $0 \leq \ell < 1$ allora $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Se $1 < \ell$ allora $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

In modo perfettamente analogo vale il seguente

Teorema (Criterio della radice)

Data $\{a_n\}_n$ successione reale, $a_n \geq 0$, tale che

$$\sqrt[n]{a_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell.$$

Se $0 \leq \ell < 1$ allora $\lim_n a_n = 0$

Se $1 < \ell$ allora $\lim_n a_n = +\infty$

Il criteri della radice e del rapporto sono legati tra loro, in quanto vale il seguente

Teorema ($a_{n+1}/a_n \longrightarrow \ell \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} \longrightarrow \ell$)

Data $\{a_n\}_n$: $a_n > 0 \ \forall n$

Se $\exists \lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$ allora $\exists \lim_n \sqrt[n]{a_n} = \ell$

dim (riassunto)

Esercizio: Calcolare $\lim_{n \to +\infty} q^n$ (utilizzare il criterio del rapporto)

dim

$a_n = q^n$ $\qquad \lim_{n \to +\infty} \frac{q^{n+1}}{q^n} = \lim_{n \to +\infty} q = q$

Se $q > 1$ allora (Crit. Rapp.) $q^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

Se $0 \leq q < 1$ allora (" ") $q^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Oss: Si poteva utilizzare pure il criterio della radice: $\sqrt[n]{q^n} = q \xrightarrow[n \to +\infty]{} q$

Esercizio: Calcolare $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$

dim.

Bisogna tenere conto del $\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \in]2,3[$

Posto $a_n = \frac{n!}{n^n}$ si ha

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{\cancel{n!}\,\cancel{(n+1)}}{(n+1)^n \cdot \cancel{(n+1)}} \cdot \frac{n^n}{\cancel{n!}} =$$

$$= \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{e}$$

Teorema

$$\text{Ma } \frac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow[n]{} \frac{1}{e} \Longrightarrow \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{e}$$

Esercizio Calcolare $\lim_{n\to+\infty} \frac{(2n)!}{2\cdot(n!)}$

dim

1° modo (con il criterio del rapporto)

$$a_n = \frac{(2n)!}{2\cdot(n!)}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!\cdot 2} \cdot \frac{n!\cdot 2}{(2n)!} =$$

$$= \frac{\cancel{(2n)!}(2n+1)(2n+2)}{\cancel{n!}(n+1)\cdot\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{n!}\cdot\cancel{2}}{\cancel{(2n)!}}$$

$$= \frac{(2n+1)\cdot 2\,\cancel{(n+1)}}{\cancel{(n+1)}} = 2\cdot(2n+1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

Criterio Rapporto

$$\Longrightarrow \exists \lim_n a_n = +\infty$$

$10 \longrightarrow 19$

2° modo (diretto) $a_n = \frac{(2n)!}{n!\cdot 2}$

$$a_n = \frac{\cancel{n!}\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot(\cancel{2}n)}{\cancel{n!}\cdot\cancel{2}} = n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot(2n-1) \geq n \to +\infty$$

Teorema confronto

$$\Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$$