Lezione 21 - Analisi Matematica 1 - 7 novembre 2013

"o-piccolo" viene detto "simbolo di Landau"

Lev Landau era un fisico matematico russo che introdusse questo simbolo per semplificare i calcoli

Infinitesimi - simboli di Landau

Def (Infinitesima)

Data $f: A \to \mathbb{R}$, sia x_0 p.d.a. per A

La funzione f si dice "Infinitesima per x che tende a x_0"
e si scrive

"$f(x) = o(1)$ per $x \to x_0$" ($f(x)$ è uguale a o piccolo di 1 per x che tende a x_0)

se $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$

Esempio (funzioni infinitesime)

1) $f(x) = x-1$ "$f(x) = o(1)$ per $x \to 1$" ovvero "$\lim_{x \to 1} (x-1) = 0$"

2) $g(x) = 3x^2$ "$g(x) = o(1)$ per $x \to 0$" ovvero "$\lim_{x \to 0} 3x^2 = 0$"

Esempio (funzione non infinitesima)

$f(x) = x-1$: "$f \neq o(1)$ per $x \to 0$" infatti "$\lim_{x \to 0} (x-1) = -1 \neq 0$"

Def ($f = o(g)$ per $x \to x_0$)

Date $f, g: A \to \mathbb{R}$, con x_0 p.d.a. per A

- $f = o(1)$ e $g = o(1)$ per $x \to x_0$

Si dice che $f = o(g)$ per $x \to x_0$

se $\exists\, \eta = o(1)$ per $x \to x_0$ tale che $f(x) = \eta(x) \cdot g(x)$ $\forall x \in A$

Oss Voglio $f(x) = \eta(x)\, g(x)$ in un intorno di x_0

$\left\{\begin{array}{l} f = o(g) \text{ per } x \to x_0 \\ \quad \text{significa che} \\ \\ f(x) \text{ è un infinitesimo "un poco più veloce"} \\ \quad \text{di } g(x) \text{ per } x \to x_0 \end{array}\right.$

Teorema (Caratterizzazione di $f = o(g)$)

$f, g : A \to \mathbb{R}$, x_0 p.d.a. A, $f = o(1)$ e $g = o(1)$ per $x \to x_0$

$g \neq 0$ su $A \setminus \{x_0\}$

Allora

$g(x) \neq 0$

$$\underbrace{f = o(g) \text{ per } x \to x_0}_{A} \iff \underbrace{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0}_{B}$$

Algebra degli "o-piccolo"

Ricordiamo sempre che $o(x^\alpha)$ (per $x \to 0$) non è una funzione, ma è un insieme di funzioni

Vediamo a quali regole soddisfa

Osserviamo che $\quad o(x^\alpha) = x^\alpha \cdot o(1)$ per $x \to 0$, $\forall \alpha > 0$

1) $o(x^\alpha) = k\, o(x^\alpha) \qquad \forall \alpha > 0 \quad \forall k \neq 0 \quad$ per $x \to 0$

equivale a $\quad \cancel{x^\alpha} \cdot o(1) = k\, \cancel{x^\alpha} \cdot o(1)$ ovvero

$o(1) = k\, o(1)$ per $x \to 0$

2) $x^\alpha \cdot o(x^\beta) = o(x^{\alpha+\beta}) \qquad \forall \alpha > 0 \ \forall \beta > 0 \quad (x \to 0)$

equivale a $\quad x^\alpha \cdot x^\beta \cdot o(1) = x^{\alpha+\beta} \cdot o(1)$

ovvero $\quad o(1) = o(1)$ per $x \to 0$

3) $o(o(x^\alpha)) = o(x^\alpha) \qquad \forall \alpha > 0 \ \forall \beta > 0 \quad (x \to 0)$

equivale a $\quad x^\alpha\, o(o(1)) = x^\alpha\, o(1)$

ovvero $\quad o(o(1)) = o(1)$ per $x \to 0$

4) $o(x^\alpha) + o(x^{\alpha+\beta}) = o(x^\alpha) \qquad \forall \alpha > 0 \ \forall \beta > 0 \quad (x \to 0)$

equivale a $\quad x^\alpha \cdot o(1) + x^{\alpha+\beta} o(1) = x^\alpha\, o(1)$ per $x \to 0$

ovvero $\quad o(1) + x^\beta o(1) = o(1)$ per $x \to 0$

banalmente $\quad o(1) + x^\beta o(1) \subseteq o(1)$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{contiene TUTTE le} \\ \text{funzioni infinitesime per } x \to 0 \end{array} \right.$

il viceversa segue dal fatto che $f = o(1) \Rightarrow f(x) + 0 \cdot x^\beta = o(1) + o(1) \cdot x^\beta$

5) $o\left(x^\alpha + o(x^\alpha)\right) = o(x^\alpha) \quad \forall \alpha > 0 \quad$ per $x \to 0$

equivale a $\quad o\left(x^\alpha\left[1+o(1)\right]\right) = o(x^\alpha) \quad \forall \alpha>0$ (per $x\to 0$)

ovvero $\quad x^\alpha \cdot o\left(1+o(1)\right) = x^\alpha \cdot o(1) \quad \forall \alpha>0$ (per $x\to 0$)

ovvero $\quad o\left(1+o(1)\right) = o(1) \quad$ per $x \to 0$

Banalmente $\quad o\left(1+o(1)\right) \subseteq o(1)$ questo è l'insieme di tutte le funzioni infinitesime

viceversa $\quad f = o(1) \Rightarrow f = f(1+0) \quad 0 = o(1) \Longrightarrow f = o(1) \quad f = f(1+o(1))$

$\Longrightarrow f = o\left(1+o(1)\right)$ per $x \to 0$

6) $o(x^\alpha)\, o(x^\beta) = o\left(x^{\alpha+\beta}\right) \quad \forall \alpha>0 \ \forall \beta>0$ (per $x\to 0$)

equivale a $\quad x^\alpha \cdot o(1) \cdot x^\beta \cdot o(1) = x^{\alpha+\beta} \cdot o(1) \quad \forall \alpha,\beta>0$ ($x \to 0$)

ovvero $\quad o(1)\cdot o(1) = o(1)$ (per $x \to 0$)

banalmente $\quad o(1)\, o(1) \subseteq o(1)$ (per $x \to 0$)

Viceversa $\quad f = o(1) \Rightarrow \exists\, g_1 = f^{1/3} = o(1) \quad g_2 = |f|^{2/3} = o(1) \ : \ f(x) = g_1(x)\, g_2(x) \quad x \to 0$

$\Longrightarrow f = o(1)\cdot o(1)$ per $x \to 0$

7) $\dfrac{o\left(x^{\alpha+\beta}\right)}{x^\alpha} = o(x^\beta) \quad \forall \alpha>0 \ \forall \beta>0$ (per $x \to 0$)

equivale alla 2)

Oss: $x^\alpha + o(x^\beta) = o(x^\beta) \quad \forall \alpha > \beta$

questo segue dalla proprietà $o(x^\alpha) + o(x^{\alpha+\beta}) = o(x^\alpha) \ \forall \alpha, \beta > 0$

infatti

se $\alpha > \beta$ allora $\lim_{x \to 0} \frac{x^\alpha}{x^\beta} = \lim_{x \to 0} x^{\alpha-\beta} = 0$ allora $x^\alpha = o(x^\beta)$

Def (equivalenza asintotica $\sim$)

Date $f, g : A \to \mathbb{R}$, x_0 pda per A, $f = o(1)$ e $g = o(1)$ per $x \to x_0$

f e g si dicono "asintoticamente equivalenti per $x \to x_0$"

se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Esempio ① $f(x) = \sin x$ $\quad g(x) = x$ sono asintoticamente equiv. per $x \to 0$ ovvero $\sin x \sim x$ per $x \to 0$

in quanto $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

② $f(x) = 1 - \cos x$ $\quad g(x) = x^2$ sono asintoticamente equiv. per $x \to 0$ ovvero $(1 - \cos x) \sim x^2$ per $x \to 0$

in quanto $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

③ $f(x) = x^3$ e $g(x) = (1 - \cos x)^2$ non sono asintoticamente equivalenti per $x \to 0$ ovvero $x^3 \not\sim (1 - \cos x)^2$ per $x \to 0$

in quanto

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos x)^2}{x^3} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos x)^2}{x^4} \lim_{x \to 0} \frac{x^4}{x^3} = 4 \cdot 0 = 0$$

ovvero $(1 - \cos x)^2 = o(x^3)$ per $x \to 0$

Oss: si può estendere la def. di asintotica equivalenza anche quando $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty\ (-\infty)$ $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty\ (-\infty)$

Def (asintotica equivalenza ∞/∞)

Date $f, g: A \to \mathbb{R}$, x_0 pdo A, $\lim_{x\to x_0} f = \infty$ $\lim_{x\to x_0} g = \infty$

f e g si dicono "asintoticamente equivalenti per $x \to x_0$" e si indica $f \sim g$ per $x \to x_0$ se $\exists \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

Esempio: $f(x) = x^3$ $g(x) = \frac{2x^4 + x^2 \operatorname{sen} x}{x + \log x}$

sono asintot. equiv. per $x \to +\infty$ infatti

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \cancel{x^3} \cdot \frac{\cancel{x} \cdot \left(1 + \frac{\log x}{x}\right)}{2\cancel{x^4} \cdot \left(1 + \frac{\operatorname{sen} x}{2x^2}\right)}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x\to+\infty} \frac{1 + \frac{\log x}{x}}{1 + \frac{\operatorname{sen} x}{2x^2}} = \frac{1}{2}$$

poiché $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x} = 0$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{2x^2} = 0$

e dunque $x^3 \sim \frac{2x^4 + x^2 \operatorname{sen} x}{x + \log x}$ per $x \to +\infty$

Def (Ordine e parte principale di un infinitesimo)

$f: A \to \mathbb{R}$, x_0 pda per A, $f = o(1)$ per $x \to o$

Se $\exists \alpha > 0$ $\exists a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ t.c.

$$f(x) = a \cdot |x - x_0|^\alpha + o\left(|x-x_0|^\alpha\right) \quad \text{per } x \to 0$$

allora diciamo

α = ordine dell'infinitesimo $f(x)$ (per $x \to 0$)

$a \cdot |x-x_0|^\alpha$ = parte principale di $f(x)$ (per $x \to 0$)

Se $\exists k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ $a \in \mathbb{R}$: $f(x) = a(x-x_0)^k + o\left((x-x_0)^k\right)$ per $x \to 0$

allora k = ordine infinitesimo $f(x)$ (per $x \to 0$)

$a(x-x_0)^k$ = p.p. di $f(x)$

Esempio: presa $f(x) = \operatorname{sen} x$, determinare ordine e p.p. di f per $x \to 0$

Si ha che $f(x) = \operatorname{sen} x = x + o(x)$ ovvero

ordine $(f) = 1$

$pp.(f) = x$ per $x \to 0$

Esercizio: Calcolare ordine e pp. di $f(x) = \cos x - 1$ per $x \to 0$

dim

Sappiamo che $1 - \cos x = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ $x \to 0$

ovvero

$$\cos x - 1 = -\frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad x \to 0$$

ordine $(\cos x - 1) = 2$

$pp\,(\cos x - 1) = -\frac{x^2}{2}$ per $x \to 0$

Esercizio $f(x) = x - x^3 + o(x^4) \quad (x \to 0)$

$g(y) = y + 2y^2 + o(y^2) \quad (y \to 0)$

Calcolare $g(f(x))$

dim

$$g(f(x)) = \left(x - x^3 + o(x^4)\right) + 2\left(x - x^3 + o(x^4)\right)^2 +$$

$$+ o\left(\left(x - x^3 + o(x^4)\right)^2\right)$$

$$= x - x^3 + o(x^4) + 2\left(x^2 + x^6 + o(x^8) - 2x^4 + o(x^5) + o(x^7)\right)$$

$$+ o\left(x^2 - 2x^4 + x^6 + o(x^5) + o(x^7) + o(x^8)\right)$$

$$= x - x^3 + o(x^4) + 2x^2 + 2x^6 + o(x^8) - 4x^4 + o(x^5) + o(x^7)$$

$$+ o\left(x^2 + o(x^2)\right)$$

Esercizio $o(x^4) + x^3 + o(x^5) + x^2 =$

Esercizio $\left(x^3 + x^4 + o(x^5)\right) \cdot \left(x + o(x^2)\right) =$

Esercizio $x^2 + o(x^3) + o\left(\left[x^2 + o(x^3)\right]^2\right) =$

Teorema (Principio di sostituzione dell'infinitesimo)

- $f_1, f_2, g_1, g_2 : A \to \mathbb{R}$ x_0 p.d.a. per A
- $f_1 = o(1)$ $f_2 = o(1)$ $g_1 = o(1)$ e $g(2) = o(1)$ per $x \to x_0$
- $f_1 = o(f_2)$ e $g_1 = o(g_2)$ per $x \to x_0$

allora, per $x \to x_0$

$$\frac{f_1+f_2}{g_1+g_2} \text{ ha lo stesso carattere di } \frac{f_2}{g_2}$$

dim

$$\frac{f_1+f_2}{g_1+g_2} = \frac{o(f_2)+f_2}{o(g_2)+g_2} = \frac{f_2}{g_2} \cdot \frac{1+\frac{o(f_2)}{f_2}}{1+\frac{o(g_2)}{g_2}}$$

ed ora

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1+\frac{o(f_2)}{f_2}}{1+\frac{o(g_2)}{g_2}} = \frac{1+0}{1+0} = 1$$

Esercizio: Calcolare $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen}^2 x + x^3}{1-\cos x + x^4}$

dim.

È della forma $0/0$.

$$x^4 = o(1-\cos x)$$
$$x^3 = o(\operatorname{sen}^2 x)$$
per $x \to 0^+$

dunque $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x + x^3}{1-\cos x + x^4} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x + o(\operatorname{sen}^2 x)}{1-\cos x + o(1-\cos x)} =$

Sviluppi di Taylor delle funzioni elementari

$$\operatorname{sen} x = x + o(x)$$

$$= x + o(x^2)$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6)$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right)$$

$$\cos x = 1 + o(x)$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3)$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)$$

$$\dots$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

Esercizio: Calcolare ordine e p.p. per $x \to 0$ di

$$f(x) = \operatorname{sen} x - x \cos x$$

dim

$\operatorname{sen} x = x + o(x)$ $\quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ $\quad x \cos x = x - \frac{x^3}{2} + o(x^3)$

$$\operatorname{sen} x - x\cos x = \cancel{x} + o(x) - \cancel{x} + \frac{x^3}{2} + o(x^3) = o(x) \text{ per } x \to 0$$

Non mi basta: ho sviluppato "Troppo poco": devo prendere altri Termini dello sviluppo di $\operatorname{sen} x$

$$\operatorname{Tg}(x) = x + o(x^2)$$

$$= x + \frac{x^3}{3} + o(x^4) \quad (x \to 0)$$

$$= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6)$$

Questo sviluppo non è regolare ovvero

non esiste una funzione f(n) che generi i coefficienti del polinomio di Taylor di Tgx !!

$$\operatorname{arctg} x = x + o(x^2)$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^6)$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

$$e^x = 1 + o(1)$$

$$= 1 + x + o(x)$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x)$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\log(1+x) = x + o(x)$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$---$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots$$

$$\dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$A^{\alpha} = e^{\alpha \log A}$$ ovvero $$(1+x)^{\alpha} = e^{\alpha \log(1+x)} = g(f(x))$$

$$f(x) = \alpha \log x = \alpha\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)\right)$$

$$g(y) = e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + o(y^4)$$

Esercizio Calcolare lo sviluppo di $\frac{1}{1-x}$

(ovvero $(1-x)^{\alpha}$ con $\alpha = -1$!)

PROBLEMA 3

Calcolate $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{3x}\cos(2x) + \log(1-3x) - (1-x^2)^2}{x - \operatorname{sen} x}$.

PROBLEMA 4

Calcolate lo sviluppo di Taylor di f fino ai termini di ordine 4, poi scrivete l'ordine di infinitesimo per $x \to 0$ e la parte principale, dove

$$f(x) = 3e^{x^2} - 2\log(x^2+1) - x \cdot \frac{1}{1-2x} - 3\cos x + \operatorname{sen} x\ .$$

PROBLEMA 3

Calcolate al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il limite

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \left(\operatorname{sen} x \cos x + \frac{x}{x^2-1}\right) .$$

PROBLEMA 3

Calcolate il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{3x - \operatorname{sen}(3x)}{e^{2x} + \log(1-2x) - 1} .$$

Calcolate poi, al variare dell'esponente $\alpha > 0$, il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{3x^\alpha - \operatorname{sen}(3x)}{e^{2x} + \log(1-2x) - 1} .$$