Lezione 20 - Analisi Matematica 1 - 5 novembre 2013

Infinitesimi - simboli di Landau

Def (Infinitesima)

Data $f: A \to \mathbb{R}$, sia x_0 p.d.a. per A
La funzione f si dice "Infinitesima per x che tende a x_0"
e si scrive

"$f(x) = o(1)$ per $x \to x_0$" ($f(x)$ è uguale a o piccolo di 1 per x che tende a x_0)

se $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$

Esempio (funzioni infinitesime)

1) $f(x) = x - 1$ "$f(x) = o(1)$ per $x \to 1$" ovvero "$\lim_{x \to 1} (x-1) = 0$"

2) $g(x) = 3x^2$ "$g(x) = o(1)$ per $x \to 0$" ovvero "$\lim_{x \to 0} 3x^2 = 0$"

Esempio (funzione non infinitesima)

$f(x) = x - 1$: "$f \neq o(1)$ per $x \to 0$" infatti "$\lim_{x \to 0} (x-1) = -1 \neq 0$"

Def ($f = o(g)$ per $x \to x_0$)

Date $f, g: A \to \mathbb{R}$ con x_0 p.d.a. per A

$f = o(1)$ e $g = o(1)$ per $x \to x_0$
Si dice che $f = o(g)$ per $x \to x_0$

se $\exists\, \eta = o(1)$ per $x \to x_0$ tale che $f(x) = \eta(x) \cdot g(x)$ $\forall x \in A$

$f = o(g)$ per $x \to x_0$

significa che

$f(x)$ è un infinitesimo "un poco più veloce" di $g(x)$ per $x \to x_0$

Teorema

$f, g : A \to \mathbb{R}$, x_0 p.d.a. A, $f = o(1)$ e $g = o(1)$ per $x \to x_0$

$g \neq 0$ su $A \setminus \{x_0\}$

Allora

$f = o(g)$ per $x \to x_0$ $\underline{\text{sse}}$ $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

Oss (la relazione "o piccolo" non è riflessiva)

$f = o(g)$ per $x \to x_0 \Rightarrow g \neq o(f)$ per $x \to x_0$

$f, g : A \to \mathbb{R}$, x_0 p.d.a. per A, $f = o(1)$ $g = o(1)$ per $x \to x_0$

Se $g \neq 0$ e $f = o(g)$ per $x \to x_0$ allora $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

allora $\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} \neq 0$

allora $g \neq o(f)$ per $x \to x_0$

Oss non è detto esista $\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)}$!

Oss: $o(x) = \{ f : U \to \mathbb{R}$: U insieme con 0 polo per U
$f = o(1)$ $x \to 0$
$\exists \eta = o(1)$ $x \to 0$:
$f(x) = \eta(x) \cdot x$ $\forall x \in U \}$

ovvero $o(x)$ è l'insieme delle funzioni infinitesime per $x \to 0$ che tendono a 0 "più velocemente" di x

$f(x) = \eta(x) \cdot x$ $\eta = o(1)$ per $x \to 0$: x è infinitesimo per $x \to 0$

$\begin{cases} x \cdot \eta(x) \text{ è infinitesimo per } x \to 0 \\ \text{e } \dfrac{x \cdot \eta(x)}{x} = \eta(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0 \end{cases}$

Oss: $x^4 = o(x^3) \not\Rightarrow$ $x^3 = o(x)$ per $x \to 0$

e $x^4 = o(x)$ per $x \to 0$ ovvero

Teorema (Transitività di o-piccolo)

$f, g : A \to \mathbb{R}$, x_0 polo per A, $f = o(1)$ $g = o(1)$ per $x \to x_0$

Se $f = o(g)$ e $g = o(h)$ per $x \to x_0$

allora $f = o(h)$ per $x \to x_0$

Si è visto $\quad \operatorname{sen} x = x + o(x)$ per $x \to 0$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad " \quad "$$

$$e^x = 1 + x + o(x) \quad " \quad "$$

(si ottiene da $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$)

Ne segue che si possono "ordinare" gli infinitesimi per $x \to x_0$

Ad esempio, per $x \to 0$ $\qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$$x \left\{ (1 - \cos x) \left\{ \left(1 - \cos x - \frac{x^2}{2}\right) \right\} \right.$$

$(1 - \cos x)$ tende a 0
più velocemente di x

Infatti $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0} x \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = 0}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \iff \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x - \frac{x^2}{2}}{x^2} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x - \frac{x^2}{2}}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x - \frac{x^2}{2}}{x^2} \cdot \frac{x^2}{1-\cos x} = 0}$$

Oss. ($f(x) \equiv 0$ tende a zero più velocemente di $\forall$ infinitesimo)

Date $g: A \to \mathbb{R}$ $\quad x_0$ p.d.a. per A $\quad g = o(1)$ per $x \to x_0$

Se f è la funzione identicamente nulla allora $f = o(g)$ per $x \to x_0$

Algebra degli "o-piccolo"

Nel seguito consideremo $x_0 = 0$ per semplicità
e considereremo f e g come potenze di x

1) $o(x^\alpha) = k\, o(x^\alpha)$ $\forall \alpha > 0$ $\forall k \neq 0$ per $x \to 0$

$f = o(x^\alpha) \iff \exists \eta = o(1) : f(x) = \eta(x) \cdot x^\alpha$

$\iff \forall k \neq 0\ \exists \eta = o(1) : f(x) = k \cdot \left(\frac{\eta(x)}{k}\right) \cdot x^\alpha$

$\iff \forall k > 0\ \exists \tilde{\eta} = \eta / k = o(1) : f(x) = k\, \tilde{\eta}(x) \cdot x^\alpha$

$\iff f = k\, o(x^\alpha)$

Conseguenza di 1): $o(x^\alpha) = -o(x^\alpha)$

Ad esempio $f(x) = x^3 + 3x^4 + o(x^5)$ può scriversi come
$f(x) + o(x^5) = x^3 + 3x^4$

Ad esempio $o(x^\alpha) - o(x^\alpha) = o(x^\alpha) + o(x^\alpha) = o(x^\alpha)$

2) $x^\alpha \cdot o(x^\beta) = o(x^{\alpha+\beta})$ $\forall \alpha, \beta > 0$ per $x \to 0$

$f = x^\alpha o(x^\beta)$ sse $\exists \eta = o(1) : f(x) = x^\alpha \eta(x) x^\beta$ sse $\exists \eta = o(1) : f(x) = \eta(x) \cdot x^{\alpha+\beta}$
sse $f = o(x^{\alpha+\beta})$

Esempio: Sia $g = o(x^\beta)$ per $x \to 0$

Allora $\lim_{x \to 0} \frac{x^\alpha \cdot g(x)}{x^{\alpha+\beta}} = \lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{x^\beta} = 0$

ovvero

$x^\alpha \cdot g(x) = o(x^{\alpha+\beta})$ $x \to 0$

ovvero

$x^\alpha \cdot o(x^\beta) = o(x^{\alpha+\beta})$ $x \to 0$

Esempio $x^4 o(x^2) = x^3 \cdot o(x^3) = x^5 o(x) = o(x^6)$ $x \to 0$

3) $o(o(x^\alpha)) = o(x^\alpha) \quad \forall \alpha > 0$ per $x \to 0$

$(\Rightarrow)$ $f = o(o(x^\alpha))$ $\underline{\text{se}}$ $\exists \eta = o(1) : f = \eta \cdot o(x^\alpha)$ $\underline{\text{se}}$ $\exists \eta = o(1)\ \exists \lambda = o(1) : f(x) = \eta(x)\lambda(x) \cdot x^\alpha$

$\Rightarrow \exists\ \bar\eta = \eta(x)\cdot\lambda(x) = o(1) : f(x) = \bar\eta(x)\cdot x^\alpha$ $\underline{\text{se}}$ $f = o(x^\alpha)$

$(\Leftarrow)$ $f = o(x^\alpha)$ $\underline{\text{se}}$ $\exists \eta = o(1) : f(x) = \eta(x)\cdot x^\alpha \Rightarrow \exists \sqrt{|\eta|} = o(1) : f(x) = \sqrt{|\eta|}(x)\sqrt{|\eta(x)|}\cdot x^\alpha$

$\Rightarrow f = o(o(x^\alpha))$

Per provare le altre proprietà di "o-piccolo" va fatta una piccola parentesi

Def. (insieme somma $A+B$)

Dati $A, B \subseteq \mathbb{R}$ con $A, B \neq \emptyset$ definiamo l'insieme $A+B$ come segue

$$A+B := \{a+b : a \in A \text{ e } b \in B\}$$

Esempi ① $A =]0,1[$ $B = [2,3] \Rightarrow A+B =]2,4[$

2) $A = [-1,1]$ $B = [2,4[\Rightarrow A+B = [1;5]$

In particolare si ha che

Teorema $(0 \in B \Rightarrow A \subseteq A+B)$

Dati $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $A, B \neq \emptyset$ $\quad 0 \in B \Rightarrow A \subseteq A+B$

dim

$A+B = \{a+b : a \in A \text{ e } b \in B\} \supseteq A+\{0\} = \{a+0 : a \in A\} = A$ ✓

Esempio

1) $A = [4,5]$ $B = [0,1] \Rightarrow A+B = [4,6] \supseteq A = [4,5]$

2) $A = [-1,3]$ $B = [-1,2] \Rightarrow A+B = [-2,5] \supseteq A = [-1,3]$

3) $A = [-4,-3]$ $B = [1,2] \Rightarrow A+B = [-3,-1] \not\supseteq A = [-4,-3]$

$\leftarrow$ infatti $0 \notin B$!

4) $o(x^\alpha) + o(x^{\alpha+\beta}) = o(x^\alpha) \quad \forall \alpha, \beta > 0 \quad$ per $x \to 0$

Provo che insiemisticamente

$$o(x^{\alpha+\beta}) \subseteq o(x^\alpha)$$

$$\begin{cases} f = o(x^{\alpha+\beta}),\ x \to 0 \quad \Rightarrow \exists \eta = o(1) : f(x) = \eta(x) \cdot x^{\alpha+\beta} \quad x \to 0 \\ \Rightarrow \exists \bar{\eta}(x) = \eta(x) \cdot x^\beta = o(1) : f(x) = \bar{\eta}(x) \cdot x^\alpha \quad x \to 0 \\ \Rightarrow f = o(x^\alpha) \quad x \to 0 \end{cases}$$

$$o(x^{\alpha+\beta}) \subseteq o(x^\alpha) \Rightarrow o(x^{\alpha+\beta}) + o(x^\alpha) \subseteq o(x^\alpha)$$

Essendo poi $0 \in o(x^{\alpha+\beta}) \Rightarrow o(x^\alpha) \subseteq o(x^{\alpha+\beta}) + o(x^\alpha)$

e quindi la tesi

Esempio $o(x^2) + o(x^4) = o(x^2)$

5) $o(x^\alpha + o(x^\alpha)) = o(x^\alpha) \quad \forall \alpha > 0 \quad$ per $x \to 0$

Proviamo che $o(x^\alpha + o(x^\alpha)) = o(x^\alpha) + o(o(x^\alpha)) = o(x^\alpha) + o(x^\alpha) = o(x^\alpha)$

$(\Rightarrow)$ $f = o(x^\alpha + o(x^\alpha))$ $x \to 0$ cioè $\exists \eta = o(1)$ $f(x) = \eta(x) x^\alpha + \eta(x) \cdot o(x^\alpha) \quad x \to 0$

$\Rightarrow f = o(x^\alpha) + o(o(x^\alpha)) \quad x \to 0$

$\Rightarrow f = o(x^\alpha) + o(x^\alpha) \quad x \to 0$

$\Rightarrow f = o(x^\alpha) \quad x \to 0$

$(\Leftarrow)$ $f = o(x^\alpha)$ $x \to 0$ $\Rightarrow \exists \eta = o(1) : f(x) = \eta(x) \cdot x^\alpha \quad x \to 0$

$\Rightarrow \exists \eta = o(1) : f(x) = \eta(x) (x^\alpha + 0 \cdot x^\alpha) \quad x \to 0$

$0 = o(1)$

$\Rightarrow f = o(x^\alpha + o(x^\alpha)) \quad x \to 0$

6) $o(x^{\alpha})\,o(x^{\beta}) = o(x^{\alpha+\beta}) \quad \forall \alpha, \beta > 0$ per $x \to 0$

$(\Longrightarrow)$ $f = o(x^{\alpha})\,o(x^{\beta})$ sse $\exists\, \eta = o(1), \lambda = o(1) : f = \eta(x)\lambda(x)\, x^{\alpha+\beta} \Rightarrow \exists\, \tilde{\eta}(x) = \eta(x)\cdot\lambda(x) = o(1)$ $f(x) = \tilde{\eta}(x)\, x^{\alpha+\beta}$

$\Longrightarrow f = o(x^{\alpha+\beta})$

$(\Longleftarrow)$ $f = o(x^{\alpha+\beta})$ sse $\exists\, \eta = o(1)$ $f(x) = \eta(x)\, x^{\alpha+\beta}$ $x \to 0$

$x \to 0$

$\Longrightarrow \exists\, \eta_1 = \eta^{1/3} = o(1)$ $\exists\, \eta_2 = \eta^{2/3} = o(1)$ $: f(x) = \eta_1(x)\, x^{\alpha} \cdot \eta_2(x)\, x^{\beta}$ $x \to 0$

$\Longrightarrow f(x) = o(x^{\alpha})\, o(x^{\beta})$ $x \to 0$

7) $\dfrac{o(x^{\alpha+\beta})}{x^{\alpha}} = o(x^{\beta}) \quad \forall \alpha,\beta>0 \quad$ per $x\to 0$

$f = o(x^{\alpha+\beta})/x^{\alpha}$ <u>se</u> $\exists\, g = o(1) : f(x) = g(x)\dfrac{\cancel{x^{\alpha}}^{\,\alpha+\beta}}{\cancel{x^{\alpha}}}$

<u>se</u> $\exists\, g = o(1) : f(x) = g(x)\cdot x^{\beta}$ <u>se</u> $f = o(x^{\beta})$

Esercizio $f(x) = x - x^3 + o(x^4) \quad (x\to 0)$

$g(y) = y + 2y^2 + o(y^2) \quad (y\to 0)$

Calcolare $g(f(x))$

dim

$$g(f(x)) = \left(x - x^3 + o(x^4)\right) + 2\left(x - x^3 + o(x^4)\right)^2 + o\left(\left(x - x^3 + o(x^4)\right)^2\right)$$

$$= x - x^3 + o(x^4) + 2\left(x^2 + x^6 + o(x^8) - 2x^4 + o(x^5) + o(x^7)\right) + o\left(x^2 - 2x^4 + x^6 + o(x^5) + o(x^7) + o(x^8)\right)$$

$$= x - x^3 + o(x^4) + 2x^2 + 2x^6 + o(x^8) - 4x^4 + o(x^5) + o(x^7) + o\left(x^2 + o(x^2)\right)$$

$$= \cdots\cdots + o(x^2)$$

$$= x + 2x^2 + o(x^2)$$

Esercizio $\quad \operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \quad x \to 0$

$$\cos y = 1 - \frac{y^2}{2} + o(y^3) \quad y \to 0$$

Calcolare lo sviluppo di $f(x) = \cos(\operatorname{sen} x)$ $x \to 0$

dim

$$\cos(\operatorname{sen} x) = 1 - \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} + o(\operatorname{sen}^3 x)$$

$$= 1 - \frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2}{2} + o\left(\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^3\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^5) + o(x^7)\right)$$

$$+ o\left(x^3 + o(x^3)\right)$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} + o(x^5) + o(x^7) + o(x^3)$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} + o(x^3)$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

Esercizio $\quad o(x^4) + x^3 + o(x^5) + x^2 =$

Esercizio $\quad \left(x^3 + x^4 + o(x^5)\right) \cdot \left(x + o(x^2)\right) =$

Esercizio $\quad x^2 + o(x^3) + o\left(\left[x^2 + o(x^3)\right]^2\right) =$

Teorema (Principio di sostituzione dell'infinitesimo)

- $f_1, f_2, g_1, g_2 : A \to \mathbb{R}$ $\quad x_0$ p.d.a. per A
- $f_1 = o(1)$ $f_2 = o(1)$ $g_1 = o(1)$ e $g(2) = o(1)$ per $x \to x_0$
- $f_1 = o(f_2)$ e $g_1 = o(g_2)$ per $x \to x_0$

allora, per $x \to x_0$

$\dfrac{f_1 + f_2}{g_1 + g_2}$ ha lo stesso carattere di $\dfrac{f_2}{g_2}$

dim

$$\frac{f_1+f_2}{g_1+g_2} = \frac{o(f_2)+f_2}{o(g_2)+g_2} = \frac{f_2}{g_2} \cdot \frac{1 + \frac{o(f_2)}{f_2}}{1 + \frac{o(g_2)}{g_2}}$$

ed ora

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1 + \frac{o(f_2)}{f_2}}{1 + \frac{o(g_2)}{g_2}} = \frac{1+0}{1+0} = 1$$

Esercizio: Calcolare $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen}^2 x + x^3}{1 - \cos x + x^4}$

dim.

È della forma $0/0$.

$$x^4 = o(1-\cos x) \quad \text{per } x \to 0^+$$
$$x^3 = o(\operatorname{sen}^2 x)$$

dunque $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x + x^3}{1-\cos x + x^4} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x + o(\operatorname{sen}^2 x)}{1 - \cos x + o(1-\cos x)} =$

Principio sostituzione

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} \cdot \frac{x^2}{1-\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1-\cos x} = 1 \cdot 2 = 2$$

Sviluppi di Taylor delle funzioni elementari

$$\operatorname{sen} x = x + o(x)$$

$$= x + o(x^2)$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6)$$

$$\cdots$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right)$$

$$\cos x = 1 + o(x)$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3)$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)$$

$$\cdots$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\mathrm{Tg}(x) = x + o(x^2)$$

$$= x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$$

$$= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6) \qquad x \to 0$$

$$\operatorname{arctg} x = x + o(x^2)$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^6)$$

$$\ldots$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

$$e^x = 1 + o(1)$$

$$= 1 + x + o(x)$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x)$$

$$\ldots$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\log(1+x) = x + o(x)$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\ldots$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots$$

$$\dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = e^{\alpha\log(1+x)}$$

$$\log(1+x) = \dots$$

$$\alpha\log(1+x) = \dots$$

$$e^{\alpha y} = \dots$$

$$e^{\alpha\log(1+x)} = \dots$$

<u>Esercizio</u> Calcolare lo sviluppo di $\frac{1}{1-x}$

(ovvero $(1-x)^\alpha$ con $\alpha = -1$!)