Lezione 19 - Analisi Matematica 1 - 4 novembre 2013

Teorema $f: A \to \mathbb{R}$, x_0 p.d.a. per A

Sia $B \subseteq A$ con x_0 p.d.a. per B

Se $\lim\limits_{x \to x_0} f = \ell$ allora $\lim\limits_{x \to x_0} f_{|B} = \ell$

Corollario $f: A \to \mathbb{R}$ x_0 p.d.a. per A

" " " $A \cap \left]-\infty, x_0\right[$

" " " $A \cap \left]x_0, +\infty\right[$

Se $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$

allora $\exists \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f_{|\left]-\infty, x_0\right[}(x) = \ell$

$\exists \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f_{|\left]x_0, +\infty\right[}(x) = \ell$

viceversa

Corollario $f: A \to \mathbb{R}$ x_0 p.d.a. per A

" " " $A \cap \left]-\infty, x_0\right[$

" " " $A \cap \left]x_0, +\infty\right[$

Se $\exists \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f_{|\left]-\infty, x_0\right[}(x) = \ell$

$\exists \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f_{|\left]x_0, +\infty\right[}(x) = \ell$

allora $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$

Infinitesimi - simboli di Landau

Def (Infinitesima)

Data $f: A \to \mathbb{R}$, sia x_0 p.d.a. per A

La funzione f si dice "Infinitesima per x che tende a x_0"

e si scrive

"$f(x) = o(1)$ per $x \to x_0$" ($f(x)$ è uguale a o piccolo di 1 per x che tende a x_0)

se $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$

Esempio (funzioni infinitesime)

1) $f(x) = x-1$ "$f(x) = o(1)$ per $x \to 1$" ovvero "$\lim_{x \to 1} (x-1) = 0$"

2) $g(x) = 3x^2$ "$g(x) = o(1)$ per $x \to 0$" ovvero "$\lim_{x \to 0} 3x^2 = 0$"

Esempio (funzione non infinitesima)

$f(x) = x - 1$: "$f \neq o(1)$ per $x \to 0$" infatti "$\lim_{x \to 0} (x-1) = -1 \neq 0$"

Def ($f = o(g)$ per $x \to x_0$)

Date $f, g: A \to \mathbb{R}$ con x_0 p.d.a. per A

$f = o(1)$ e $g = o(1)$ per $x \to x_0$ (f e g infinitesime per $x \to x_0$)

Si dice che $f = o(g)$ per $x \to x_0$

se $\exists\, \eta = o(1)$ per $x \to x_0$ tale che $f(x) = \eta(x) \cdot g(x)$ $\forall x \in A$

Oss $f = o(g)$ $x \to x_0$ dice che f è "un poco più infinitesima di quanto non lo è g"

Oss: $f = o(g)$ per $x \to x_0$ se $\exists \eta = o(1)$: $f(x) = \eta(x) g(x)$ $\forall x \in A$

Teorema (Def. equivalente di $f = o(g)$ per $x \to x_0$)

$f, g : A \to \mathbb{R}$, x_0 p.d.a. per A, $f = o(1)$ e $g = o(1)$ per $x \to x_0$ e $g \neq 0$ in $A \setminus \{x_0\}$. Allora

$$\underbrace{f = o(g) \text{ per } x \to x_0}_{A} \quad \text{se} \quad \underbrace{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0}_{B}$$

dim

$A \Rightarrow B$

$f = o(g)$ per $x \to x_0$ $\Rightarrow \exists \eta = o(1)$ $x \to x_0$: $f(x) = \eta(x) g(x)$ $\forall x \in A$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\eta(x) \cdot \cancel{g(x)}}{\cancel{g(x)}} = \lim_{x \to x_0} \eta(x) = 0$$

essendo $g \neq 0$ in $A \setminus \{x_0\}$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

$B \Rightarrow A$

$g \neq 0$ $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \eta(x) = o(1)$ $x \to x_0$

$\Rightarrow f(x) = \eta(x) \cdot g(x)$ $\forall x \in A \setminus \{x_0\}$ dove $\eta = o(1)$ per $x \to x_0$

$\Rightarrow f = o(g)$ per $x \to x_0$ ↯

Oss (fondamentale)

$o(g)$ per $x \to x_0$ non è una funzione, ma è un insieme di funzioni

Esempio: sia $g(x) = x^2$: $g = o(1)$ per $x \to 0$

- $f(x) = x^3$, $f = o(1)$ per $x \to 0$ $\quad x^3 = o(x^2)$ per $x \to 0$ (infatti $\lim_{x \to 0} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \to 0} x = 0$)

- $h(x) = 3x^4$, $h = o(1)$ per $x \to 0$ $\quad 3x^4 = o(x^2)$ per $x \to 0$ (infatti $\lim_{x \to 0} \frac{3x^4}{x^2} = \lim_{x \to 0} 3x^2 = 0$)

- $t(x) = x^{1000}$, $t = o(1)$ per $x \to 0$ $\quad x^{1000} = o(x^2)$ per $x \to 0$ (infatti $\lim_{x \to 0} \frac{x^{1000}}{x^2} = \lim_{x \to 0} x^{998} = 0$)

Dunque sarebbe più corretto scrivere, per $x \to 0$

$3x^4 \in o(x^2) \quad x^{1000} \in o(x^2) \quad x^3 \in o(x^2)$ etc

ovvero

$$o(x^2) \equiv \{ f : U \to \mathbb{R} : U \in \mathcal{I}_0 \text{ ed } \exists\, \eta = o(1) \text{ per } x \to 0 \text{ t.c. } f(x) = \eta(x) \cdot x^2 \quad x \in U \}$$

Esercizio $\quad \operatorname{sen} x = x + o(x)$ per $x \to 0$

dim

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \quad \text{sse} \quad \lim_{x \to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} - 1 \right) = 0 \quad \text{sse}$$

$$\text{sse} \quad \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x} = 0$$

$\underline{\text{sse}}$ $\operatorname{sen} x - x = o(x)$ per $x \to 0$

$\underline{\text{sse}}$ $\operatorname{sen} x = x + o(x)$ " " $\checkmark$

Oss: $\operatorname{sen} x = x + o(x)$ per $x \to 0$

significa

$\operatorname{sen} x = x + \left(\begin{array}{l}\text{qualcosa che tende a zero} \\ \text{più veloce di } x \text{ quando } x \to 0\end{array}\right)$ $x \to 0$

Oss: In qualche senso $o(x)$ è trascurabile rispetto a x per $x \to 0$

Esercizio: Provare che $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ per $x \to 0$

dim

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \quad \underline{\text{sse}} \quad \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x - \frac{x^2}{2}}{x^2} = 0$$

$\underline{\text{sse}}$ $1 - \cos x - \frac{x^2}{2} = o(x^2)$ per $x \to 0$

$\underline{\text{sse}}$ $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} \underbrace{-\, o}\, (x^2)$ per $x \to 0$

$\underline{\text{sse}}$ $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ per $x \to 0$ $\checkmark$

Problema: $\underbrace{-o(x^2) = o(x^2)}$ per $x \to 0$? VERO

Questa identità è vera poiché $o(x^2)$ è un insieme (e non una singola funzione!)

Lemma $\quad o(x^n) = k \cdot o(x^n) \quad \forall k \neq 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$ per $x \to 0$

dim

$$f = o(x^n) \quad x \to 0 \quad \Rightarrow \exists\, \eta = o(1) \quad f(x) = \eta(x) \cdot x^n \quad x \to 0$$

$$\Rightarrow \exists\, \eta = o(1) \quad f(x) = k \cdot \frac{\eta(x)}{k} x^n \quad x \to 0 \quad \forall k \neq 0$$

$$\Rightarrow \exists\, \eta/k = \bar{\eta} = o(1) \quad f(x) = k \cdot \bar{\eta}(x) \cdot x^n \quad x \to 0 \quad \forall k \neq 0$$

$$\Rightarrow f = k\, o(x^n) \quad x \to 0 \quad \forall k \neq 0$$

viceversa

$$f = k\, o(x^n) \quad x \to 0 \quad k \neq 0 \quad \Rightarrow \exists\, \eta = o(1) \quad f(x) = k\, \eta(x) \cdot x^n \quad x \to 0 \quad k \neq 0$$

$$\Rightarrow \exists\, k\eta = \bar{\eta} = o(1) \quad f(x) = \bar{\eta}(x) \cdot x^n \quad x \to 0 \quad k \neq 0$$

$$\Rightarrow f = o(x^n) \quad x \to 0$$

Oss: $f = o(g)$ per $x \to x_0 \Rightarrow g \neq o(f)$ per $x \to x_0$

Supponendo infatti $f, g \neq 0$ in $A \setminus \{x_0\}$ $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} \neq 0$

(posto che esista!)

Ovvero la relazione "$f = o(g)$" non è riflessiva

Oss: $x^4 = o(x^3)$ & $x^3 = o(x)$ per $x \to 0$, come pure

$x^4 = o(x)$ per $x \to 0$

Oss (Transitività di o-piccolo)

Se $f = o(g)$ e $g = o(h)$ per $x \to x_0$ $\quad f, g: A \to \mathbb{R}$

x_0 p.d.e. per A

allora $f = o(h)$ per $x \to x_0$

dim

$f = o(g)$ $g = o(h)$ per $x \to x_0$

ovvero $\exists\, \eta_{b_1} = o(1)$ $\eta_{b_2} \overset{\text{per } x \to x_0}{=} o(1)$: $f(x) = \eta_{b_1}(x)\, g(x)$ $\quad g(x) = \eta_{b_2}(x) \cdot h(x)$ $\quad \forall x \in A$