Lezione 18 - Analisi Matematica 1 - 4 Novembre 2015

La funzione esponenziale e^x

e = costante di Eulero = 2,71828....

Si considera la funzione $f(x) = e^x$ che gode delle seguenti proprietà

1) $f : \mathbb{R} \longrightarrow]0,+\infty[$

2) $e^0 = 1$

3) $e^{x+y} = e^x e^y \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$

4) $e^x \geq 1+x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Da queste 4 proprietà seguono tutte le altre proprietà di e^x

5) $e^{-x} = 1/e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

infatti $\quad 1 \overset{②}{=} e^0 = e^{x+(-x)} \overset{③}{=} e^x \cdot e^{-x} \Rightarrow$ #

6) e^x è strettamente crescente

Bisogna provare che $\boxed{x<y \Rightarrow e^x < e^y}$

" " " $0<y-x \Rightarrow 1/e^{-x} < e^y$

" " " $0<y-x \Rightarrow 1<e^y \cdot e^{-x}$

" " " $0<y-x \Rightarrow 1<e^{y-x}$

Ma $e^{(y-x)} \underset{\stackrel{\uparrow}{(4)}}{\geq} 1+(y-x) > 1$

in quanto $y-x>0$

Quindi: $y>x \Rightarrow y-x>0 \Rightarrow e^{y-x}>1 \Rightarrow e^y>e^x$

7) $e^x \leq 1+xe^x \quad \forall x\in\mathbb{R}$

Sse. $e^x(1-x)\leq 1 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

Sse $\frac{1}{e^{-x}}(1-x) \leq 1 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

Sse. $1-x \leq e^{-x} \quad \forall x\in\mathbb{R}$

Sse. $1+(-x) \leq e^{(-x)} \quad \forall x\in\mathbb{R}$

e questo segue dalla (4)

8) $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

(4) $e^x \geq 1+x \quad \forall x\in\mathbb{R}$ (Per il Teorema del Confronto)

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} e^x \geq \lim_{x\to+\infty}(1+x) = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$

9) $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0^+$

cambio variabile $y=-x$

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{-x}} \stackrel{\downarrow}{=} \lim_{y\to-\infty}\frac{1}{e^y} = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{y\to-\infty} e^y = 0^+$$

10) e^x è continua $\forall x \in \mathbb{R}$

(i) $e^0=1$ $\quad e^x$ è continua in $x=0$

④ ⑦ ⑥ quando $x<1$

$$\underbrace{1+x}_{\substack{x\to 0 \\ \downarrow \\ 1}} \overset{④}{\leq} e^x \overset{⑦}{\leq} 1+x\cdot e^x \overset{⑥}{\leq} \underbrace{1+xe}_{\substack{x\to 0 \\ \downarrow \\ 1}}$$

$\Rightarrow$ (Thm dei 2 Carabinieri) $\displaystyle\lim_{x\to 0} e^x = e^0 = 1$

Fissato $x_0 \in \mathbb{R}$, devo provare $\displaystyle\lim_{x\to x_0} e^x = e^{x_0}$

" " " $\displaystyle\lim_{x\to x_0} (e^x - e^{x_0}) = 0$

" " " $\displaystyle\lim_{x\to x_0} e^{x_0}\left(e^{x-x_0}-1\right) = 0$

" " " $\displaystyle e^{x_0}\lim_{x\to x_0}\left(e^{x-x_0}-1\right) = 0$

" " " $\displaystyle e^{x_0}\lim_{(x-x_0)\to 0}\left(e^{x-x_0}-1\right) = 0$

cambio variabile nel limite $y = x-x_0$

" " " $\displaystyle e^{x_0}\lim_{y\to 0}\left(e^{y}-1\right) = 0$

Ma $\displaystyle\lim_{y\to 0}(e^y-1)=0$ segue dalla continuità di e^y in $y=0$

11) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

Si sa che

$$1+x \overset{④}{\leq} e^x \overset{⑦}{\leq} 1+xe^x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Downarrow$$

$$x \leq e^x - 1 \leq xe^x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Downarrow$$

$$x>0 \Rightarrow 1 \leq \frac{e^x-1}{x} \leq e^x$$

$$x<0 \Rightarrow e^x \leq \frac{e^x-1}{x} \leq 1$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\min\{1, e^x\}}_{\xrightarrow{x\to 0}\ 1} \leq \frac{e^x-1}{x} \leq \underbrace{\max\{1, e^x\}}_{\xrightarrow{x\to 0}\ 1} \qquad \forall x \neq 0$$

$\Rightarrow$ (Thm dei 2 Carabinieri) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$

12) $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^k} = +\infty \quad \forall k \in \mathbb{N}$

Per la ④ $e^x \geq 1+x \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$$\Rightarrow e^x = \left(e^{x/2}\right)^2 \geq \left(1+\frac{x}{2}\right)^2 = 1+x+\frac{x^2}{4} \geq \frac{x^2}{4} \quad \forall x \geq 0$$

$$\Rightarrow e^x = \left(e^{x/3}\right)^3 \geq \left(1+\frac{x}{3}\right)^3 \geq \frac{x^3}{27} \quad \forall x \geq 0$$

$$\dots$$

$$\Rightarrow e^x = \left(e^{x/(k+1)}\right)^{k+1} \geq \left(1+\frac{x}{k+1}\right)^{k+1} \geq \frac{x^{k+1}}{(k+1)^{k+1}} \quad \forall x \geq 0$$

dunque

$$\frac{e^x}{x^k} \geq \frac{1}{(k+1)^{k+1}} \cdot \frac{x^{k+1}}{x^k} = \frac{x}{(k+1)^{k+1}} \quad \forall x \geq 0$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{c}\text{Per il Teorema} \\ \text{del confronto}\end{array}\right) \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^k} \geq +\infty = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{(k+1)^{k+1}}$$

La funzione logaritmo $\log_e x$

$\boxed{f(x)=e^x}$ $\quad f:\mathbb{R}\longrightarrow]0,+\infty[$

- f continua $\forall x\in\mathbb{R}$
- f strettamente crescente su $\mathbb{R}$

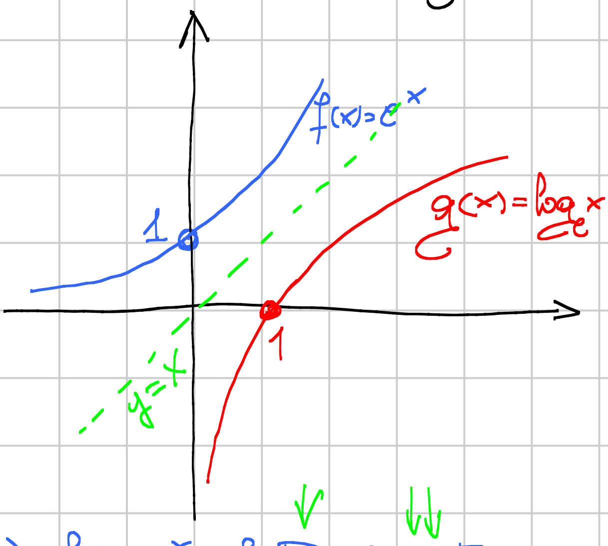
$\Rightarrow$ $f^{-1}:]0,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$ (funzione inversa di $f=e^x$)

- f^{-1} continua $\forall x\in]0,+\infty[=f(\mathbb{R})$
- f^{-1} strettamente crescente

$$\begin{cases} f^{-1}(f(x)) = \log_e(e^x) = x & \forall x\in\mathbb{R} \\ f(f^{-1}(x)) = e^{\log_e x} = x & \forall x\in]0,+\infty[\end{cases}$$

la funzione inversa è il logaritmo in base e

$\log_e x$



$g(x) = \log_e(x) = f^{-1}(x)$

1) $f(x)=e^x$ $\quad f:\mathbb{R}\to]0,+\infty[$ $\qquad$ 1) $f^{-1}(x)=\log_e x$ $\quad f^{-1}:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$

2) $e^0=1$ $\quad (0,1)\in \mathrm{Graf}(e^x)$ $\qquad$ 2) $\log_e 1 = 0$ $\quad (1,0)\in\mathrm{Graf}(\log x)$

3) $e^{x+y}=e^x e^y$ $\quad \forall x,y\in\mathbb{R}$ $\qquad$ 4) $\log x+\log y=\log(x\cdot y)$ $\quad \forall x,y\in]0,+\infty[$

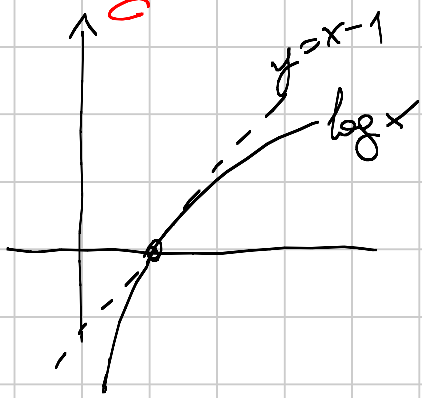
$$e^{\log x+\log y} = e^{\log x}e^{\log y} = x\cdot y$$

$$e^{\log(x\cdot y)} = x\cdot y$$

e quindi è verificato

4) $e^x \geq 1+x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

5) $\log x \leq x-1 \quad \forall x>0$



$e^x \geq 1+x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$x = \log y \quad y>0$

$e^{\log y} \geq 1+\log y \quad \forall y>0$

$y \geq 1+\log y \quad \forall y>0 \quad \Longrightarrow \quad y-1 \geq \log y \quad \forall y>0$

5) $e^x = 1/e^{-x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

5) $\log x = -\log 1/x \quad \forall x>0$

$$e^{\log x} = x \overset{\checkmark}{=} e^{-\log 1/x} = \frac{1}{e^{\log 1/x}} = \frac{1}{1/x} = x$$

6) e^x strettamente crescente

7) $\log x$ strettamente crescente

Conseguenza diretta del Teorema di esistenza della funzione inversa continua

7) $e^x \leq 1+xe^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Downarrow$ posto $x=\log y \quad \forall y>0$

$e^{\log y} \leq 1+\log y \cdot e^{\log y} \quad \forall y>0$

$y \leq 1+y\cdot\log y \quad \forall y>0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{y-1}{y} \leq \log y \quad \forall y>0$

8) $\frac{x-1}{x} \leq \log x \quad \forall x>0$

8) $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

8) $\lim_{x\to+\infty} \log x = +\infty$

x assurdo $\lim_{x\to+\infty} \log x = M < +\infty$

$\Rightarrow +\infty = \lim_{x\to+\infty} x = \lim_{x\to+\infty} e^{\log x} = e^M$

Assurdo $\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \log x = +\infty$

9) $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0^+$

9) $\lim_{x\to 0^+} \log x = -\infty$

$\lim_{x\to0^+} \log x \underset{y=1/x}{=} \lim_{y\to+\infty} \log \frac{1}{y}$

$= -\lim_{y\to+\infty} \log y = -\infty$

10) e^x è continua $\forall x\in\mathbb{R}$

10) $\log x$ è continua $\forall x>0$

Segue dal Teorema di esistenza della funzione inversa: se f è strett. crescente e continua allora f^{-1} è strett. crescente e continua

Altrimenti, si procede come per l'esponenziale

In $x=1$ $\log x$ è continua e $\lim_{x\to1} \log x = \log 1 = 0$

infatti $\frac{x-1}{x} \le \log x \le x-1 \quad \forall x>0$

$\frac{x-1}{x} \xrightarrow{x\to1} 0$, $\quad x-1 \xrightarrow{x\to1} 0$

e per il Teorema dei 2 Carabinieri $\lim_{x\to1} \log x = \log 1 = 0$

Quando prendo $x_0>0$ devo provare

$\lim_{x\to x_0} \log x = \log x_0$ ~~se~~ $\lim_{x\to x_0} \log \frac{x}{x_0} = 0$

Si ha che

$1-\frac{1}{x/x_0} \le \log\frac{x}{x_0} \le \frac{x}{x_0}-1 \quad \forall x>0 \quad \forall x_0>0$

$1-\frac{x_0}{x} \le \log\frac{x}{x_0} \le \frac{x-x_0}{x_0}$

$\frac{x-x_0}{x} \le \log\frac{x}{x_0} \le \frac{x-x_0}{x_0} \Rightarrow$ (Thm dei 2 Carabinieri)

$\frac{x-x_0}{x} \xrightarrow{x\to x_0} 0$, $\quad \frac{x-x_0}{x_0} \xrightarrow{x\to x_0} 0$

$\lim_{x\to x_0} \log\frac{x}{x_0} = 0$

11) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$

11) $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$

Quando $x \to 0$ si ha $y = e^x - 1 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

$$1 = \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} \underset{y=e^x-1}{=} \lim_{y\to 0} \frac{y}{\log(1+y)} \Rightarrow \lim_{y\to 0} \frac{\log(1+y)}{y} = 1$$

$y+1 = e^x$

$\log(1+y) = x$

passando ai reciproci

12) $\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^k} = +\infty$ $\forall k \in \mathbb{N}$

12) $\lim_{x\to +\infty} \frac{(\log x)^k}{x} = 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$

$$+\infty = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^k} \underset{y=e^x}{=} \lim_{y\to +\infty} \frac{y}{(\log y)^k} \quad \forall k \in \mathbb{N} \Longrightarrow$$

passando ai reciproci

$$\Longrightarrow \lim_{y\to +\infty} \frac{(\log y)^k}{y} = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Esercizio: Calcolare $\lim_{x\to 0^+} x \log x$

dim

$$\lim_{x\to 0^+} x\log x = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\log 1/x}{1/x} \underset{y=1/x}{=} -\lim_{y\to +\infty} \frac{\log y}{y} = 0^-$$

(Infatti $\log y > 0$ per $y \to +\infty$ $\Rightarrow \lim_{y\to +\infty} \frac{\log y}{y} = 0^+$

$y > 0$ " ")

Potenza a esponente reale x^α

Problema: mentre è chiaro cosa significa

$$x^n = x \cdot x^{n-1} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall n \geq 1$$

come pure è chiaro, per ogni $x \geq 0$

$$x^{p/q} = \left(x^p\right)^{1/q} = \left(x^{1/q}\right)^p$$

Non è chiaro cosa sia $2^{\sqrt{2}}$, ovvero una Potenza a Esponente Reale.

Def comunque si prenda $x>0$

definiamo $\boxed{x^\alpha := e^{\alpha \cdot \log x}}$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$2^3 := e^{3 \log 2} = e^{\log 2 + \log 2 + \log 2} = e^{\log 2^3}$$

$$2^{3/2} = e^{\frac{3}{2} \log 2} = e^{3 \log \sqrt{2}} = e^{\log (\sqrt{2})^3} = 2^{3/2}$$

$2^{1/3}$

$$2^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2} \log 2} \quad \left(\text{ovvero } 2 \longmapsto \sqrt{2} \log 2 \longmapsto e^{\sqrt{2} \log 2}\right)$$

Quindi si dà un senso a q^x per $q>0, x \in \mathbb{R}$

$$q^x = e^{x \log q}, \quad q>0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto x \log q \longmapsto e^{x \log q} = q^x$$

Esercizio: Calcolare $\lim_{x \to +\infty} \frac{q^x}{x^k}$

al variare di $q>0$ e $k \in \mathbb{N}$

dim

$q=1$ $\lim_{x \to +\infty} \frac{1^x}{x^k} = 0 \quad \forall k \geq 1$

$q \neq 1$ $\frac{q^x}{x^k} = \frac{e^{x \log q}}{e^{k \log x}} = e^{x \log q - k \log x} =$

$$= e^{x\left(\log q - k \frac{\log x}{x}\right)} \xrightarrow[x \to +\infty]{} \begin{cases} +\infty & q>1 \\ 0 & 0<q<1 \end{cases} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$