

Lezione 17 - Analisi Matematica 1 - 4 novembre 2013

Teorema (limita per infinitesimi $\equiv$ infinitesime)

$$\left. \begin{array}{l} \bullet f, g: A \rightarrow \mathbb{R}, \quad x_0 \text{ p.d.a. per } A \\ \bullet \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \\ \bullet \exists M > 0 : |g(x)| \leq M \quad \forall x \in A \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f \cdot g)(x) = 0$$

prendo $x_0 \in \mathbb{R}$. Le ipotesi sono ($x_0 = \pm\infty$)

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in A \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon \quad \leftarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f = 0$$

$$|g(x)| \leq M \quad \forall x \in A$$

da cui

$$|f(x) \cdot g(x)| \leq |f(x)| \cdot |g(x)|$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in A \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) \cdot g(x)| \leq M \cdot \varepsilon$$

da cui segue la tesi ovvero $\lim_{x \rightarrow x_0} f \cdot g = 0$

Esercizio Dato $g(x) = \sin \frac{1}{x}$ e $f(x) = \sin x$

calcolare $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x \cdot \sin \frac{1}{x}$
dire

però $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ quale è? ricordo $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \nexists$

da cui $\nexists \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$

Quindi limite prodotto $\neq$ prodotto limiti non si applica

Ma $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$

inoltre $|\sin \frac{1}{x}| \leq 1 \quad \forall x \neq 0$ (poiché $\sin x$ limitato)

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \cdot \sin \frac{1}{x} = 0$ per il teorema precedente

Esercizio

$f: A \rightarrow \mathbb{R}$ x_0 p.d.o. per A

Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ allora $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |l|$?

$$f = \sin x \xrightarrow{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} |\sin x| = |1| = 1 \quad \checkmark$$

$$\sin x \xrightarrow{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} -1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} |\sin x| = |-1| = 1 \quad \checkmark$$

Tip $\left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} \quad x_0 \in \mathbb{R} \right)$

~~$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = l$~~

Tip: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in A \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

$$\text{ma} \quad ||f(x)| - |l|| < |f(x) - l|$$

$$\Downarrow \\ \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in A \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow ||f(x)| - |l|| < \varepsilon$$

$$\Downarrow \\ \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |l| \quad \text{?}$$

è vero il viceversa, cioè

$f: A \rightarrow \mathbb{R}$ x_0 p.d.o. per A

Se $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |l|$ allora $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$?
FALSO

Per provare che è FALSA l'implicazione mi basterà portare un controesempio

$$f(x) = \cos x$$

$$x_0 = \frac{3}{2}\pi$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}\pi} |\cos x| = |-1| = 1$$

e

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}\pi} \cos x = -1 \neq 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} |\cos x| = |1| = |-1| = 1$$

e

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos x = 1 \neq -1$$

$$\text{ovvero } |A| = |l| \Leftrightarrow A = l \text{ o } A = -l$$

$$\text{e dunque } |A| = |l| \not\Rightarrow A = l \text{ come } |A| = |l| \not\Rightarrow A = -l$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Però quando } \boxed{l=0} \text{ si ha} \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \quad \text{se} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |l| \end{array} \right.$$

In altre parole, per x_0 p.d.e. per A si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \quad \text{se} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$$

Q f è strettamente monotona su $I \Rightarrow f$ è debolmente monotona su I

Oss: (concetto "locale" e "globale")

• La continuità di f in x_0 è un concetto locale (puntuale)

• Il $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ è un concetto locale (puntuale)

• La monotonia di $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ è un concetto globale (dipende da I !!)

Per esempio: $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ è debolmente crescente

$$\text{se } \forall x, y \in I \quad x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

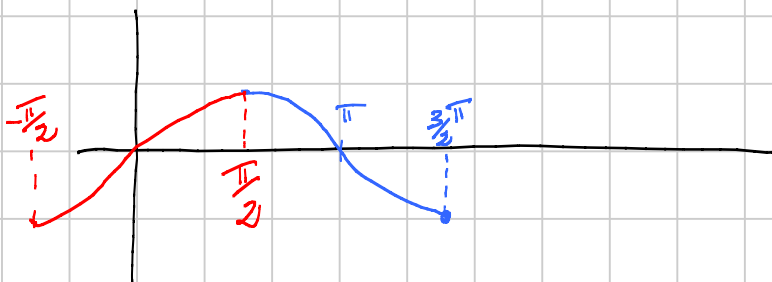
↑
devo fare il Test
su tutte le coppie
 $(x, y) \in I \times I$

Oss: (monotonia al variare del dominio) Prendi $f(x) = \sin x$

• $\sin x$ è strettamente crescente su $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

• " " " decrescente su $]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$

• " NON È MONOTONA SU $]0, \pi[$



Monotoniz e limiti

Teorema (Limiti di funzioni monotone)

$f: I \rightarrow \mathbb{R}$, I intervallo

- (i) Se f debolmente crescente allora $\forall x_0 \in I \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$
 (ii) " " " decrescente " " $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$

dim.

Sia $I = [a, b]$, si supponga f debolmente crescente.

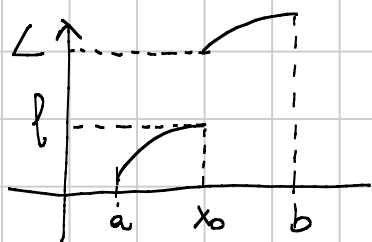
Se $x_0 \in]a, b[$ allora $\exists \lim_{x \rightarrow x_0^+} f$ e $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f$

Se $x_0 = a$ ($x_0 = b$) allora $\exists \lim_{x \rightarrow a^+} f$ ($\lim_{x \rightarrow b^-} f$)

Iniziamo con il caso $x_0 \in]a, b[$. Essendo f debolmente crescente, si considerano $[a, x_0[$ e $]x_0, b]$ insieme a

$$l = \sup f([a, x_0[) \leq \inf f([x_0, b]) = L$$

(l ed L esistono in quanto $f([a, x_0[) \subseteq \mathbb{R}$ e $f([x_0, b]) \subseteq \mathbb{R}$ e sono diversi dal vuoto)



E' ragionevole operare che

$$l = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

$$L = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

Proviamo che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l = \sup f([a, x_0[) \in \mathbb{R}$

Per ipotesi

$$\begin{cases} l = \sup f([a, x_0[) \\ f \text{ debolmente crescente} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) \leq l \quad \forall x \in [a, x_0[\\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_\varepsilon \in [a, x_0[: l - \varepsilon < f(x_\varepsilon) \\ f(x_\varepsilon) \leq f(x) \quad \forall x \in]x_\varepsilon, x_0[\end{cases}$$

Fissato $\delta_\varepsilon = x_0 - x_\varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x \in I \quad x_0 - \delta_\varepsilon < x < x_0 \Rightarrow l - \varepsilon < f(x) \leq l + \varepsilon$

ovvero $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon = x_0 - x_\varepsilon > 0 : \forall x \in I \quad x_0 - \delta_\varepsilon < x < x_0 \Rightarrow l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$

ovvero $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l$

Analogamente si prova $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f = L = \inf f([x_0, b]) \in \mathbb{R}$

Per $\left\{ \begin{array}{l} L = \inf f([x_0, b]) \\ f \text{ debbono essere crescente} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} L \leq f(x) \quad \forall x \in [x_0, b] \\ \forall \varepsilon > 0 \exists x_\varepsilon \in [x_0, b] : f(x_\varepsilon) < L + \varepsilon \\ f(x) \leq f(x_\varepsilon) \quad \forall x \in [x_0, x_\varepsilon] \end{array} \right.$

Posto $\delta = x_\varepsilon - x_0 \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x \in I \quad x_0 < x < x_0 + \delta_\varepsilon \quad L - \varepsilon < L \leq f(x) \leq f(x_\varepsilon) < L + \varepsilon$

ovvero $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x \in I \quad x_0 < x < x_0 + \delta_\varepsilon \quad L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$

ovvero $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$

Nel caso in cui $x_0 = a$, devo provare che

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \inf f([a, b]) = L_a$$

ovvero, essendo f deb. crescente

$$\left\{ \begin{array}{l} L_a \leq f(x) \quad \forall x \in I \\ \forall \varepsilon > 0 \exists x_\varepsilon \in I : f(x_\varepsilon) < L_a + \varepsilon \\ f(x) \leq f(x_\varepsilon) \quad \forall x \in [a, x_\varepsilon] \end{array} \right.$$

ovvero, posto $\delta = x_\varepsilon - a$ si ha

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x \in I \quad a < x < a + \delta \Rightarrow L_a - \varepsilon < L_a \leq f(x) \leq f(x_\varepsilon) < L_a + \varepsilon$$

ovvero

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x \in I \quad a < x < a + \delta \Rightarrow L_a - \varepsilon < f(x) < L_a + \varepsilon$$

ovvero

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_a$$

Nel caso in cui $x_0 = b$ devo provare

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \sup f([a, b]) = L_b$$

Per ipotesi

$$\begin{cases} f(x) \leq L_b \quad \forall x \in I \\ \forall \varepsilon > 0 \exists x_\varepsilon \in [a, b] : L_b - \varepsilon < f(x_\varepsilon) \\ f(x_\varepsilon) \leq f(x) \quad \forall x \in]x_\varepsilon, b[\end{cases}$$

da cui si ricava, posto $\delta_\varepsilon = b - x_\varepsilon$

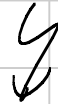
$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x \in I \quad b - \delta_\varepsilon < x < b \Rightarrow L_b - \varepsilon < f(x_\varepsilon) \leq f(x) \leq L_b < L_b + \varepsilon$$

ovvero

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x \in I \quad b - \delta_\varepsilon < x < b \Rightarrow L_b - \varepsilon < f(x) < L_b + \varepsilon$$

ovvero

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = L_b$$



LA FUNZIONE INVERSA

Teorema (stretta monotonia $\Rightarrow$ iniettività)

DATA $f: A \rightarrow f(A)$ strettamente crescente (decrescente)

Allora f è biettiva

dim.

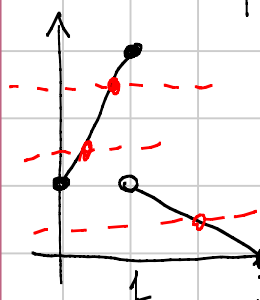
Si supponga f strettamente crescente:

$$\text{Presi } x, y \in A \quad x \neq y \Rightarrow \begin{cases} x < y \Rightarrow f(x) < f(y) \\ y < x \Rightarrow f(y) < f(x) \end{cases} \Rightarrow f(x) \neq f(y)$$

(Arrows in the original image point from the inequalities to the function values, and from the final result back to the inequalities.)

Oss: il viceversa non vale, come prova il seguente

Controesempio (f iniettiva ma non strett. monotona)



$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{3}{2} - \frac{x}{2} & 1 < x \leq 3 \end{cases}$$

è una funzione iniettiva ma non monotona

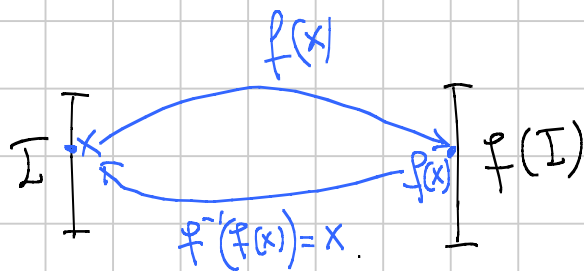
Def (LA funzione inversa)

Sia $f: I \rightarrow f(I)$ una funzione biettiva su $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo. La funzione

$g: f(I) \rightarrow I$ si dice 'funzione inversa di f ', cioè $g(x) = f^{-1}(x)$,

e soddisfa $(f \circ g)(y) = f(g(y)) = y \quad \forall y \in f(I)$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = x \quad \forall x \in I$$

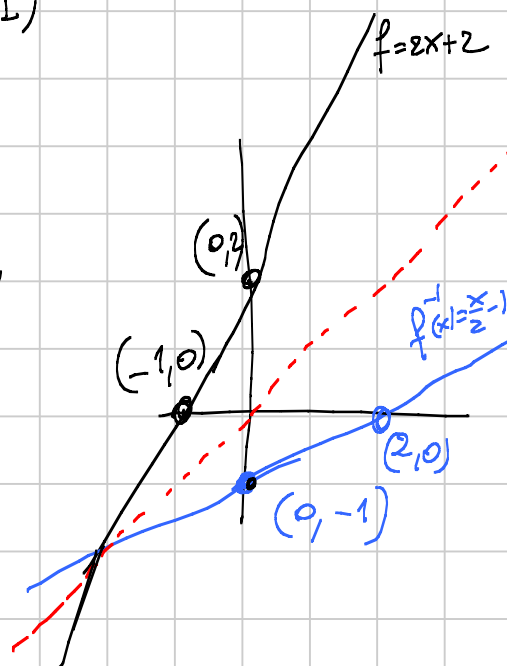


Example $f(x) = 2x + 2$

$y = 2x + 2$

$2x = y - 2$

$x = \frac{y-2}{2} \quad x = \frac{y}{2} - 1$



Graphico $f = \{(x, f(x)) : x \in I\}$

Graphico $f^{-1} = \{(f(x), x) : f(x) \in f(I)\} = \{(y, f^{-1}(y)) : y \in f(I)\}$

$(u, v) \in \text{Graphico di } f \iff (v, u) \in \text{Graphico di } f^{-1}$

Teorema

$f: I \rightarrow f(I)$ continua. Sono tra loro equivalenti:

(i) f strettamente monotona

(ii) f iniettiva (e dunque invertibile)

Teorema (continuità e monotonia di f^{-1})

Sia $f: I \rightarrow f(I)$ con I intervallo

- f strettamente crescente (decrescente)
- f continua $\forall x \in I$

Allora $\exists g = f^{-1}: f(I) \rightarrow I$ la funzione inversa t.c.

- $f(I)$ intervallo (segue dal Teorema Vabri Intermedi)
- g è strettamente crescente (decrescente)
- g è continua $\forall x \in f(I)$

Esempio

$$f(x) = \tan(x) \quad \forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[= I$$

- f è continua $\forall x \in I$
- f è strettamente crescente su I (*)

$$\Rightarrow \exists g = f^{-1} \quad g(x) = \arctan x \quad g: \mathbb{R} \rightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

$g = f^{-1}$ è continua $\forall x \in \mathbb{R}$
 $g = f^{-1}$ " strettamente crescente su $\mathbb{R}$

$$(*) \text{ Dico provare } \tan x < \tan y \quad \forall y > x \quad y, x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

$$\text{" " } \frac{\sin x}{\cos x} < \frac{\sin y}{\cos y} \quad \text{" "}$$

$$\text{" " } \sin x \cos y < \sin y \cos x \quad \text{" "}$$

$$\text{" " } \sin(y-x) > 0 = \sin(0) \quad \forall x, y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

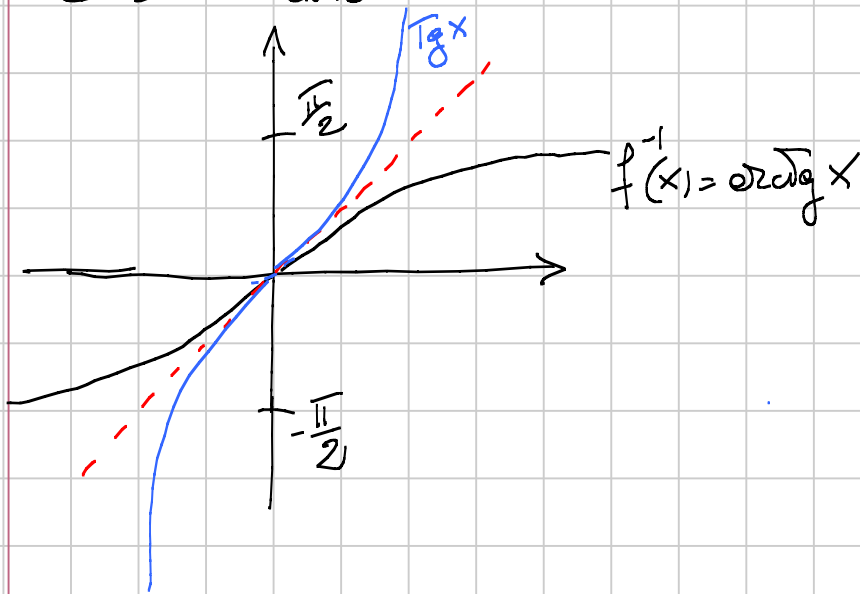
$\sin(0)$

ce questo è vero poiché $\sin(y-x) > \sin(0) = 0 \quad \forall y-x > 0 \quad y-x < \pi$

Si osservi che

$$0 < y - x < |y| + |x| \leq \pi$$

Gráficamente

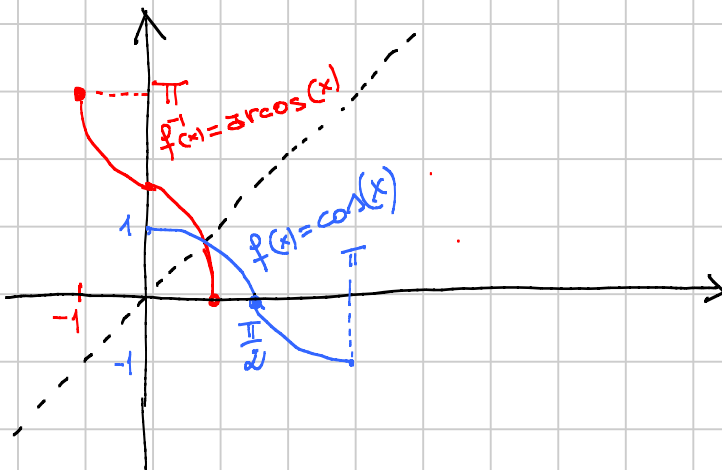


Esempio

La funzione $f = \cos x$ $f: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ è continua e strettamente decrescente

$\Rightarrow \exists g = f^{-1} = \arccos x$ $g: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ continua e strett. decrescente

Geometricamente

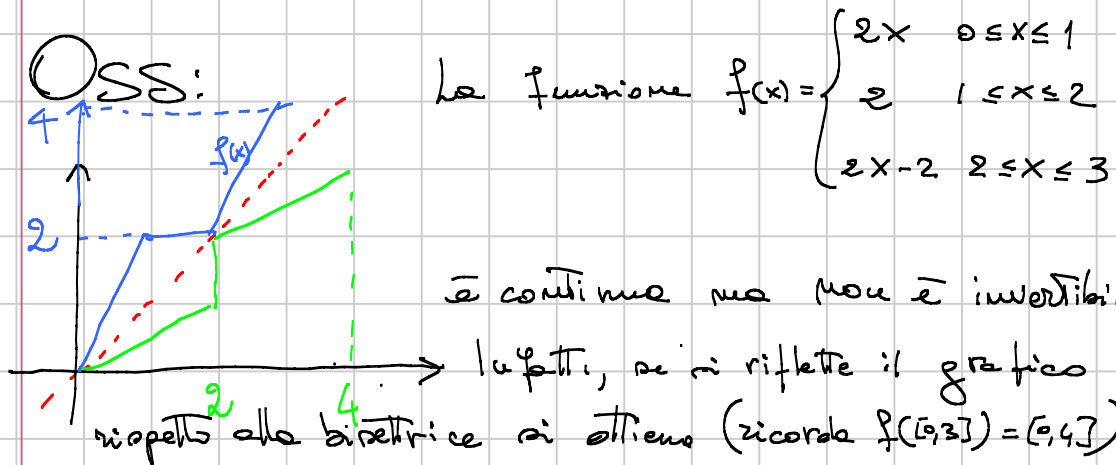


ENUNCIATI & DIMOSTRAZIONI RELATIVI ALLA FUNZIONE INVERSA

Esempio $f(x) = 2x + 1$ definita su $I = [0, 2]$.

Si ha $f(I) = [1, 5]$, $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$ che risulta essere
continua e strettamente crescente

Ques $(u, v) \in \{(x, f(x)) : x \in I\}$ o $(v, u) \in \{(x, f^{-1}(x)) : x \in f(I)\}$
ovvero il grafico della funzione inversa si ottiene
"riflettendo" il grafico di $f(x)$ rispetto alla diagonale
del 1° e 3° quadrante



$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & 0 \leq x \leq 2 \\ 2 & x = 2 \\ \frac{x}{2} + 1 & 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

che non è una funzione
in quanto $f(2) = [1, 2]!!$

Teorema (f stret. monotona $\Rightarrow \exists f^{-1}$ stret. monotona)

$f: I \rightarrow f(I)$ con I intervallo

Se f è strettamente crescente (decrecente)

Allora $\exists f^{-1}: f(I) \rightarrow I$ strettamente crescente (decrecente)

dim.

Supponiamo f crescente strettamente

f è suriettiva per costruzione

f è iniettiva infatti

$$x \neq y \Rightarrow \begin{cases} x < y \Rightarrow f(x) < f(y) \\ x > y \Rightarrow f(x) > f(y) \end{cases} \Rightarrow f(x) \neq f(y)$$

dunque $f: I \rightarrow f(I)$ è biettiva, quindi $\exists f^{-1}: f(I) \rightarrow I$

e si ha $f(f^{-1}(x)) = x \quad \forall x \in f(I)$

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall x \in I$$

Essendo f strettamente crescente

$$\underbrace{x < y}_{\text{ne}} \Rightarrow f(x) < f(y)$$

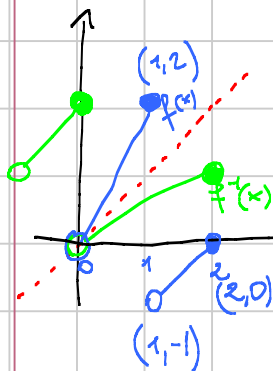
$$\underbrace{f(x) < f(y)}_{\text{ne}} \Rightarrow x < y$$

$$\underbrace{f(x) < f(y)}_{\text{ne}} \Rightarrow f^{-1}(f(x)) < f^{-1}(f(y))$$

$$z = f(x) < f(y) = w \Rightarrow f^{-1}(z) < f^{-1}(w)$$

✓

Esempio



$$f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq 1 \\ x-2 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

$$f: [0, 2] \rightarrow [-1, 2]$$

invertibile con inversa

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} x+2 & -1 \leq x \leq 0 \\ x/2 & 0 < x \leq 2 \end{cases}$$

Oss: Per avere $f: I \rightarrow f(I)$ invertibile e non strettamente monotona si deve rinunciare alla continuità!

E infatti vale il seguente teorema

Teorema (f continua su intervallo $\Rightarrow [f$ invertibile $\Leftrightarrow f$ strett. monotona])

$f: I \rightarrow f(I)$, I intervallo, f continua. Allora sono equivalenti

- (i) f invertibile
- (ii) f strettamente monotona

dim (anni)

(ii) $\Rightarrow$ (i) già vista (e non serve la continuità)

(i) $\Rightarrow$ (ii) **dimostrazione più avanti**
serve il Teorema dei Valori Intermedi

" $f: I \rightarrow f(I)$, I intervallo, f continua
 $\Rightarrow f(I)$ intervallo"

Si deve provare che

$f: I \rightarrow f(I)$ continua

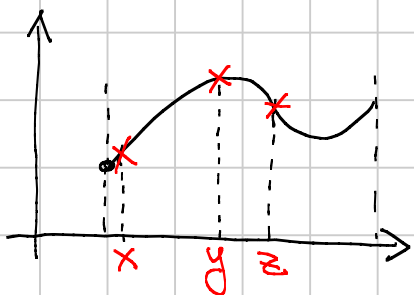
f invertibile

I intervallo

$\Rightarrow f$ strettamente monotona

Per assurdo f non sia monotona: in tal caso

$$\exists x, y, z \in I \quad x < y < z \quad \text{e} \quad f(x) < f(z) < f(y)$$



Considerato l'intervallo $[x, y]$

$$f: [x, y] \rightarrow f([x, y])$$

e $f([x, y])$, per il Teorema dei valori intermedi, contiene tutti i valori

compresi tra $f(x)$ e $f(y)$, ovvero $\forall k: f(x) < k < f(y)$

esiste $w \in [x, y]: f(w) = k$.

Dunque, essendo $f(x) < f(z) < f(y)$, esiste $w \in [x, y]$ t.c.

$$f(w) = f(z)$$

Ma $w \in [x, y]$ mentre $z \notin [x, y]$, allora

f NON È INIETTIVA

Assurdo essendo f invertibile

Dunque f è monotona

Proviamo ora che, presi $a, b \in I$ con $a < b$

se $f(a) < f(b)$ allora f strettamente crescente

ovvero

$$\text{se } f(a) < f(b) \text{ allora } [\forall x_1, x_2 \in I \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)]$$

Presi $x_1 < x_2 \in I$, sia $b_1 := \max\{b, x_2\}$

Se $f(a) < f(b)$ allora $f(a) < f(x) \quad \forall x > a$ (elim. in a, b)

- $x < b$ se $f(x) \leq f(a) < f(b)$ allora considerato $[x, b]$ esiste (Thm valori intermedi) $w \in [x, b]: f(w) = f(a)$ con $w \neq a$ assurdo
- $x \geq b$ se $f(x) \leq f(a) < f(b)$ allora preso $[b, x]$ esiste (Thm valori intermedi) $w \in [b, x]: f(w) = f(a)$ con $w \neq a$ assurdo

allora $f(a) < f(b_1)$ (essendo $b_1 > a$)

allora $f(x) < f(b_1) \quad \forall x < b_1$ (dim in blu)

- $a < x < b_1$ se $f(a) < f(b_1) \leq f(x)$ allora considerato $[a, x]$ esiste (tm. Val. Int.) $w \in [a, x]$ t.c. $f(w) = f(b_1)$ con $w \neq b_1$ assurdo
- $x \leq a < b_1$ se $f(a) < f(b_1) \leq f(x)$ allora preso $[x, a]$ esiste (tm. Val. Int.) $w \in [x, a]$ t.c. $f(w) = f(b_1)$ con $w \neq b_1$ assurdo

allora $f(x_1) < f(b_1)$ (essendo $x_1 < b_1$)

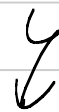
allora $f(x_1) < f(x) \quad \forall x > x_1$ (dim in blu)

- $x_1 < x < b_1$ se $f(x) \leq f(x_1) < f(b_1)$ allora preso $[x, b_1]$ esiste (tm. Val. Int.) $w \in [x, b_1]$: $f(w) = f(x_1)$ con $w \neq x_1$ assurdo
- $x_1 < b_1 \leq x$ se $f(x) \leq f(x_1) < f(b_1)$ allora preso $[b_1, x]$ esiste (tm. Val. Int.) $w \in [b_1, x]$: $f(w) = f(x_1)$ con $w \neq x_1$ assurdo

allora $f(x_1) < f(x_2)$ (in quanto $x_1 < x_2$)

In modo analogo se $f(a) > f(b)$ allora si prova

che f è strettamente decrescente



Teorema (continuità della funzione inversa)

Sia data $f: I \rightarrow f(I)$

- Se
- I intervallo
 - f continua
 - f strettamente monotona

allora $\exists g = f^{-1}: f(I) \rightarrow \mathbb{R}$

- continua
- strettamente monotona

Lemma (f strett. monotona su $I \Rightarrow [f \text{ continua su } f(I) \text{ intervallo}]$)

$f: I \rightarrow f(I)$, I intervallo, f strettamente monotona

Allora sono equivalenti,

(i) f continua

(ii) $f(I)$ intervallo

Dim

(i) $\Rightarrow$ (ii) Segue dal Teorema dei Valori Intermedi:

(e non serve la monotonia)

(ii) $\Rightarrow$ (i) Supponiamo f strett. crescente (non è restrittivo!)

Dobbiamo provare

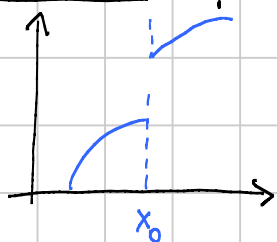
$f: I \rightarrow f(I)$ I intervallo

f strett. crescente

$\Rightarrow f$ continua

$f(I)$ intervallo

assurdo f non è continua in $x_0 \in]a, b[$ ove $I = [a, b]$



ovvero

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l < L = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

Essendo f strett. crescente $f(x) \leq l \quad \forall x \in [a, x_0[$

$L \leq f(x) \quad \forall x \in]x_0, b]$

Adesso $]l, L[\cap f(I) = \begin{cases} \emptyset, & \text{quando } l = f(x_0) = L = f(x_0) \\ f(x_0), & \text{quando } l < f(x_0) < L \end{cases}$

in quanto $f(x_0) \begin{cases} \text{può coincidere con } l \\ \text{può } \in]l, L[\\ \text{può coincidere con } L \end{cases}$

Presi $x_1 \in [a, x_0[$ $x_2 \in]x_0, b]$ $[f(x_1), f(x_2)] \subseteq f([a, b])$ ($f([a, b])$ è un intervallo)

ma $]l, L[\not\subseteq [f(x_1), f(x_2)]$ (in ftti. $]l, L[\cap [f(x_1), f(x_2)]$ può essere $\emptyset$ o coincidere con $f(x_0)$)

Assurdo



dim (della continuità di f^{-1})

Dobbiamo provare che, data $f: I \rightarrow \mathbb{R}$

Se $\begin{cases} \bullet I \text{ intervallo} \\ \bullet f \text{ continua} \\ \bullet f \text{ strettamente} \\ \text{monotona} \end{cases}$

Allora $\exists g = f^{-1}: f(I) \rightarrow \mathbb{R}$
 $\bullet$ continua
 $\bullet$ strettamente monotona

Essendo f strett. monotona, esiste $g = f^{-1}$ funzione inversa strett. monotona. Per la continuità di f , $f(I)$ è un intervallo.

$g: J \rightarrow g(J)$ dove $J = f(I)$
 g è strettamente monotona
 J è un intervallo
 $g(J) = g(f(I)) = I$ è un intervallo

$\left. \begin{array}{l} \text{Lemma} \\ \text{precedente} \\ \downarrow \\ \Rightarrow \end{array} \right\} g \text{ è continua}$

e questo conclude il Teorema $\checkmark$