Lezione 16 - Analisi Matematica 1 - 31 ottobre 2013

Teorema (del confronto)

$f, g : A \to \mathbb{R}$ $\quad x_0$ p.d.a per A

(1) $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \quad \exists \lim_{x \to x_0} g(x) = m \implies \ell \leq m$

$f(x) \leq g(x) \ \forall x \in A$

(2) $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \implies \exists \lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$ (*)

$f(x) \leq g(x) \ \forall x \in A$

(3) $\exists \lim_{x \to x_0} g(x) = -\infty \implies \exists \lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

$f(x) \leq g(x) \ \forall x \in A$

dim.

(2) $\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R} \quad x_0 \text{ p.d.a. } A \\ f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in A \\ \lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \end{cases} \implies \exists \lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$

$$\begin{cases} \forall M > 0 \ \exists \delta = \delta(M, x_0) > 0 : \forall x \in A \quad 0 < |x - x_0| < \delta \implies M < f(x) \\ f(x) \leq g(x) \ \forall x \in A \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\forall M > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in A \quad 0 < |x - x_0| < \delta \implies M < f(x) \leq g(x)$$

$$\Downarrow$$

$$\to \forall M > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in A \quad 0 < |x - x_0| < \delta \implies M < g(x)$$

$\Longrightarrow \lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$ ↯

(i) suppongo $l, m, x_0 \in \mathbb{R}$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_1 > 0 : \forall x \in A \quad 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$

$\quad " \quad \exists \delta_2 > 0 : \quad " \quad 0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow m - \varepsilon < g(x) < m + \varepsilon$

$f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in A$

preso $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in A \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \begin{cases} l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon \\ m - \varepsilon < g(x) < m + \varepsilon \\ f(x) \leq g(x) \end{cases}$$

$\Downarrow$

$\quad " \quad " \quad " \quad " \quad \Rightarrow \quad m - \varepsilon < g(x) \leq f(x) < l + \varepsilon$

$\Downarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \quad m - \varepsilon < l + \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad m \leq l$

(iii) lasciata per esercizio (molto simile a (ii)) ↯

Teorema (dei 2 Carabinieri)

$f, g, h : A \to \mathbb{R}$ $\quad x_0$ p.d.a per A

- $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell = \lim_{x \to x_0} h(x)$
- $f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \forall x \in A$

$$\Longrightarrow \exists \lim_{x \to x_0} g(x) = \ell$$

dim

$x_0 \in \mathbb{R} \quad \ell \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_1 > 0 : \forall x \in A \ \ 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow \ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_2 > 0 : \forall x \in A \ \ 0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow \ell - \varepsilon < h(x) < \ell + \varepsilon \\ f(x) \leq g(x) \leq h(x) \ \ \forall x \in A \end{cases}$$

$$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$$

$\Downarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in A \ \ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \begin{cases} \ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon \\ \ell - \varepsilon < h(x) < \ell + \varepsilon \\ f(x) \leq g(x) \leq h(x) \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in A \ \ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ell - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < \ell + \varepsilon$$

$\Downarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in A \ \ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \ell - \varepsilon < g(x) < \ell + \varepsilon$$

$\Downarrow$

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell \quad ↯$$

NB: Non ha molto senso prendere $\ell = +\infty$ $(-\infty)$ poichè in tal caso si deve utilizzare il thm preced

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

se $\forall M > 0 \ \exists N > 0 : \quad x > N \Rightarrow f(x) > M$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$$

se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N > 0 : \ x > N \Rightarrow \ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$

etc.

Teorema (f continua $\Rightarrow$ f localmente limitata)

$f: A \to \mathbb{R}$ $\quad x_0 \in A$

Se f continua in x_0

allora $\exists \delta > 0 \ \exists c = |f(x_0)| + 1 : \ |f(x)| \leq c \ \forall x \in A \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$

dim

<u>Def</u> (Insieme limitato)

$A \subseteq \mathbb{R}$ questo si dice "limitato" se

$\exists \delta > 0 : \quad A \subseteq]-\delta, \delta[$

<u>Def</u> (funzione limitata)

$f: A \to \mathbb{R}$ $\quad A \subseteq \mathbb{R}$, questa si dice

"limitata" <u>se</u> $f(A)$ è un insieme limitato

<u>Esempio</u> ① $f(x) = \operatorname{arctg} x$ è limitata

in quanto $f(\mathbb{R}) =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

② $f(x) = x^3$ $\quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è illimitata

poiché $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

③ $f(x) = x^3$ $\quad f: [0,1] \to \mathbb{R}$ è limitata

poiché $f([0,1]) = [0,1]$ che è limitato dim (f continua $\Rightarrow$ f localmente limitata)

Hp. f continua in x_0 $\Rightarrow$ Th f localmente limitata

Hp. $\underbrace{\forall \varepsilon > 0}$, $\exists \delta > 0 : \forall x \in A \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$

$\Downarrow$

Fisso $\boxed{\varepsilon = 1}$ $\exists \delta > 0 : \forall x \in A \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x_0) - 1 < f(x) < f(x_0) + 1$

$\Downarrow$

$\varepsilon = 1 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in A \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| \leq \max\{|f(x_0) - 1|, |f(x_0) + 1|\}$

$\Downarrow$

$\exists \delta > 0 : \forall x \in A \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\quad |f(x)| \leq |f(x_0)| + 1 =: C$

Oss: $\max\{|f(x_0) - 1|, |f(x_0) + 1|\}$

$\wedge\!\!|$

$\max\{|f(x_0)| + |-1| ; |f(x_0)| + |1|\} = |f(x_0)| + 1$

Teorema (f ha limite finito $\Rightarrow$ f è localmente limitata)

$f: A \to \mathbb{R}$ $\quad x_0$ p.d.a. per A

Se $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$

allora $\exists \delta > 0 \ \exists c = |\ell| + 1 : \ |f(x)| \leq c \quad \forall x \in (]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\}) \cap A$

dim

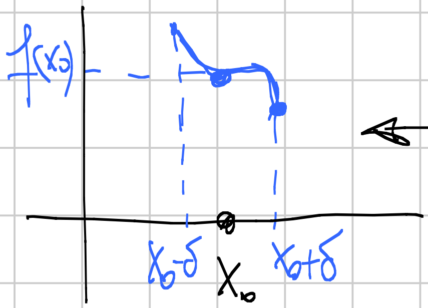
perfettamente analoga a quella del Teorema precedente $\not\downarrow$

Teorema (Permanenza del segno per le funzioni continue)

$f: A \to \mathbb{R} \quad x_0 \in A$; (i) f continua in x_0

(ii) $f(x_0) > 0$

Allora $\exists \delta > 0 : \ f(x) > 0 \quad \forall x \in A \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$

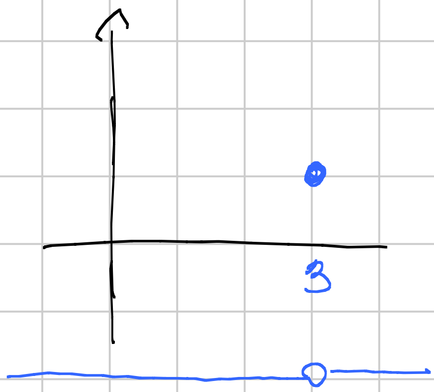


Graficamente il Thm della Permanenza del segno

OSS: Se $f(x_0)>0$ ma f non è continua in x_0 allora non è detto valga il Teorema

Controesempio:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x=3 \\ -2 & x\neq 3 \end{cases}$$



Questa funzione NON è continua e

$\forall \delta>0 \ \exists x_\delta \in]3-\delta, 3+\delta[\ : \ f(x_\delta)<0$

dim (Teorema permanenza segno)

$$\begin{cases} f \text{ continua in } x_0 \\ f(x_0)>0 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} \forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 : x\in A \quad |x-x_0|<\delta \Rightarrow f(x_0)-\varepsilon<f(x)<f(x_0)+\varepsilon \\ f(x_0)>0 \end{cases}$$

devo scegliere ε : $f(x_0)-\varepsilon>0$

$f(x_0)>\varepsilon>0$

$\Downarrow$

Fisso

$\varepsilon=\frac{f(x_0)}{2}$ $\exists \delta>0 : \forall x\in A\cap]x_0-\delta, x_0+\delta[\quad f(x_0)-\frac{f(x_0)}{2}<f(x)$

$\Downarrow$

$\varepsilon=\frac{f(x_0)}{2}$ $\exists \delta>0 : \forall x\in A\cap]x_0-\delta, x_0+\delta[\quad 0<\frac{f(x_0)}{2}<f(x)$

$\Downarrow$

$\exists \delta>0 :$ " $0<f(x)$ $\lightning$

Teorema (Permanenza del segno per i limiti)

$f: A \to \mathbb{R}$ x_0 p.d.a. per A

$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell > 0$

Allora $\exists \delta > 0 : f(x) > 0 \quad \forall x \in \left( ]x_0-\delta, x_0+\delta[\setminus \{x_0\} \right) \cap A$

dim

$\ell \in \mathbb{R}$ $x_0 \in \mathbb{R}$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall x \in A \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$

$\varepsilon = \ell/2 \quad \exists \delta > 0 : \forall x \in A \cap \left( ]x_0-\delta, x_0+\delta[\setminus \{x_0\} \right) \quad \ell - \frac{\ell}{2} < f(x)$

$\exists \delta > 0 : \forall x \in A \cap \left( ]x_0-\delta, x_0+\delta[\setminus \{x_0\} \right) \quad 0 < \frac{\ell}{2} < f(x)$ ↯

Per provare la continuità

→ Si parte dalle funzioni elementari

- Polinomi
- funzioni Trigonometriche
- Esponenziale

Oss: in campo complesso $e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$

e si ha $\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ $\quad \cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{ix}}{2}$

ovvero le funzioni trigonometriche sono legate all'esponenziale complesso

Inoltre $e^{z+2ik\pi} = e^z \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

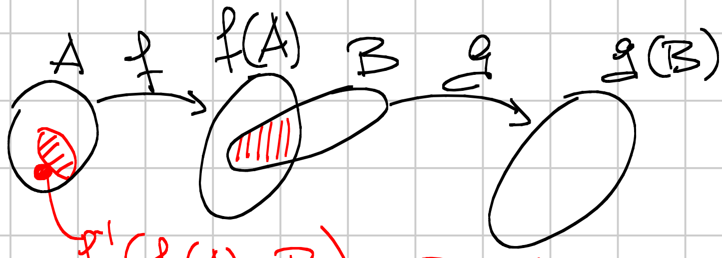
ovvero l'esponenziale è periodico (nella parte immaginaria)

→ Dopo aver provato la continuità delle funzioni elementari, attraverso il Teorema algebrico si prova che

somma (differenza) di funzioni continue è continua

Prodotto (divisione) " " " "

→ Infine si prova che la composizione di funzioni continue è continua



$f^{-1}(f(A) \cap B) = \Omega$ dominio di $g \circ f$!

Teorema (continuità della funzione composta)

$f: A \to \mathbb{R}$, $g: B \to \mathbb{R}$ t.c. $f^{-1}(f(A) \cap B) = \Omega \neq \emptyset$

Si suppone f continua in $x_0 \in \Omega$ e g continua in $y_0 = f(x_0)$

Allora

$g \circ f : \Omega \to \mathbb{R}$ è continua nel punto x_0

e si ha $(g \circ f)(x_0) = g(f(x_0)) = g(y_0)$

dim

① $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \rho > 0 : \forall y \in B \quad |y - y_0| < \rho \Rightarrow |g(y) - g(y_0)| < \varepsilon$.

continuità di g

continuità di f

② $\forall \rho > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in \Omega \overset{= \text{dom}(g \circ f)}{} \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \rho$.

Oss
$$\begin{cases} x \in \Omega = f^{-1}(f(A) \cap B) \Rightarrow f(x) \in f\left[f^{-1}(f(A) \cap B)\right] = f(A) \cap B \\ \Rightarrow f(x) \in f(A) \text{ e } f(x) \in B \end{cases}$$

② $\forall \rho > 0 \ \exists \delta = \delta(\rho, x_0) : \forall x \in \Omega \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow \begin{cases} |f(x) - y_0| < \rho \\ f(x) \in B \end{cases}$

① $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \rho = \rho(\varepsilon, y_0) : \forall y \in B \ |y - y_0| < \rho \Rightarrow |g(y) - g(y_0)| < \varepsilon$

$\Downarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \rho = \rho(\varepsilon, y_0) \ \exists \delta = \delta(\rho, x_0) = \delta(\varepsilon, x_0, \underset{f(x_0)}{y_0}) : \forall x \in \Omega \ |x - x_0| < \delta$

vedi osservazione

$\Rightarrow \begin{cases} |f(x) - y_0| < \rho \\ f(x) \in B \end{cases} \Rightarrow |g(f(x)) - g(y_0)| < \varepsilon$

$\Downarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(x_0, \varepsilon) : \forall x \in \Omega \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon$

$\Downarrow$

Esempio $f(x) = 4 - x^2$ è continua $\forall x \in \mathbb{R}$

$g(y) = \sqrt{y}$ " " $\forall y \geq 0$

allora $(g \circ f)(x)$ è continua $\forall x \in \Omega = f^{-1}(f(\mathbb{R}) \cap [0, +\infty[)$

$= [-2, 2]$

Infatti $f(\mathbb{R}) =]-\infty, 4]$ $\quad f(\mathbb{R}) \cap [0, +\infty[= [0, 4]$

e quindi $f^{-1}([0,4]) = [-2, 2] = \Omega$

Cambiamento di variabile nei limiti

Problema $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(1 - \cos x)}{1 - \cos x} \overset{?}{=} \lim_{y \to 0} \frac{\operatorname{sen} y}{y} = 1$

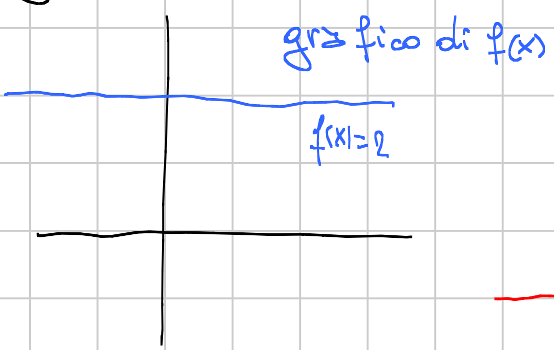
$\displaystyle 1 - \cos x \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

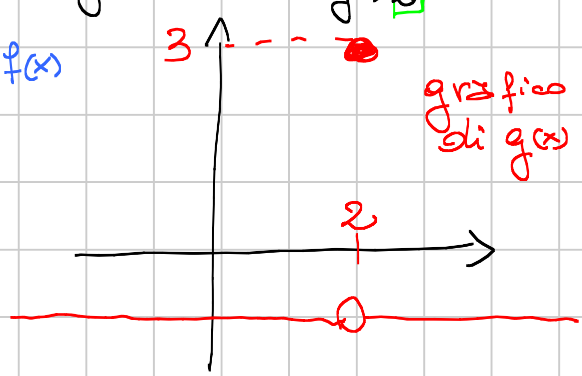
posso porre $y = 1 - \cos x$ sapendo che $\displaystyle \lim_{x \to 0} 1 - \cos x = 0$?

OSS: bisogna fare attenzione poiché in molti casi questo cambiamento di variabile non è consentito

CONTROESEMPIO (in questo esempio non si può cambiare variabile)

- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad \boxed{f(x) = 2 \ \forall x \in \mathbb{R}} \Rightarrow \displaystyle \lim_{x \to 0} f(x) = \boxed{2}$
- $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad g(y) = \begin{cases} -1 & \forall y \neq 2 \\ 3 & y = 2 \end{cases} \Longrightarrow \displaystyle \lim_{y \to \boxed{2}} g(y) = -1$





$$\lim_{x\to 0} (g\circ f)(x) = \lim_{x\to 0} g(f(x)) = \lim_{x\to 0} g(2) = 3$$

mentre

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \boxed{2} \qquad \lim_{y\to \boxed{2}} g(y) = -1$$

- (1) pb. : la funzione g non è continua in $y=2$
- (2) pb. $\nexists W \in \mathcal{I}_0$ $\quad f(x)=2 \ \forall x \in W$

ovvero non si può fare il cambio di variabili $y=f(x)$

Ma perché?

(i) perché f è costante e $f(x)=2 \ \forall x\in W \ \forall W \in \mathcal{I}_0$

e

(ii) perché g è discontinua in $y=2$

Teorema (Cambiamento di variabile nei limiti)

$f: A \to \mathbb{R}$, x_0 p.d.a. per $\Omega = f^{-1}(f(A)\cap B)$

$g: B \to \mathbb{R}$, y_0 p.d.a. per $f(A)\cap B$

1) $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$

2) $\lim_{y\to y_0} g(y) = l$

Se vale una delle seguenti ipotesi

α) $\exists W \in \mathcal{I}_{x_0}$: $f(x)\neq y_0 \quad \forall x \in (W\setminus\{x_0\})\cap\Omega$ ← f non è costante $= a$ y_0

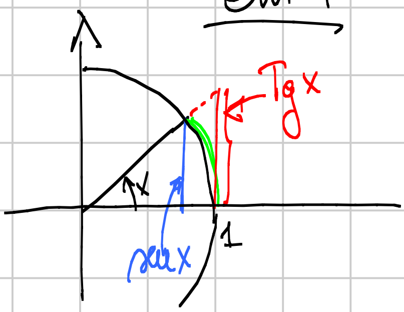
β) g continua in y_0

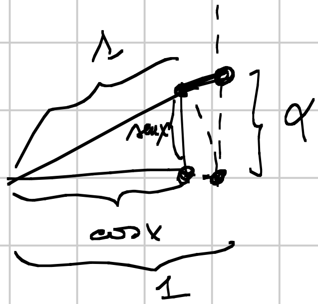
allora $\displaystyle\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = \lim_{y\to y_0} g(y) = l$

$\boxed{y=f(x)}$

Esercizio $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

dim





$\alpha : \operatorname{sen} x = 1 : \cos x \qquad \alpha = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

$\operatorname{sen} x < x < \operatorname{Tg} x \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2}$

$0 < \operatorname{sen} x < x < \operatorname{Tg} x \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2}$

$\Downarrow$

$1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x} \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2}$

(i) $\cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1 \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2}$

$\cos(-x) < \frac{\operatorname{sen}(-x)}{(-x)} < 1 \qquad 0 < -x < \frac{\pi}{2}$

$\cos x < \frac{-\operatorname{sen} x}{-x} < 1 \qquad -\frac{\pi}{2} < x < 0$

(ii) $\cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1 \qquad -\frac{\pi}{2} < x < 0$

$$(i)+(ii) \qquad \cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1 \quad \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\}$$

$$\cos x \xrightarrow{x \to 0} 1 \qquad 1 \xrightarrow{x \to 0} 1$$

$\Rightarrow$ (Thm 2 Carabinieri) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

Oss: $\displaystyle\lim_{x \to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$

$$= 1$$

<u>Esercizio</u> Provare che $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

<u>dim</u>

Voglio ricondurre questo limite al limite $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1-\cos 2\frac{x}{2}}{x^2} =$$

$$= \frac{1-\left[\cos^2\frac{x}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{x}{2}\right]}{x^2} = \frac{2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}{x^2}$$

$$= \frac{2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{x/2}\right)^2$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{x/2}\right)^2 \underset{y=\frac{x}{2}}{=} \lim_{y \to 0} \frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{sen} y}{y}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

Esempio

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(2x^2+4x)}{x^2+2x} = 2$$

dim

$f(x) = 2x^2+4x$

$$g(y) = \frac{\text{sen}\, y}{y/2} = 2\frac{\text{sen}\, y}{y}$$

questa funzione si può estendere con continuità in $y=0$ come

$$\tilde{g}(y) = \begin{cases} 2\frac{\text{sen}\, y}{y} & y \neq 0 \\ 0 & y=0 \end{cases}$$

Dunque $\lim_{x\to 0}(2x^2+4x) = 0$ $\quad\quad$ $\tilde{g}$ è continua in $y=0$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} 2\,\frac{\text{sen}(2x^2+4x)}{2x^2+4x} = \lim_{y\to 0} 2\,\frac{\text{sen}\, y}{y} = 2$$

$(y = 2x^2+4x)$

e siamo autorizzati a fare il cambio variabili poiché $\tilde{g}$ è continua in $y=0$!

Algebra di $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

- $c \in \mathbb{R}$ $\quad \boxed{c + \infty = +\infty} \quad \boxed{c - \infty = -\infty}$

- $c > 0$ $\quad \boxed{c \cdot (+\infty) = +\infty} \quad \boxed{c \cdot (-\infty) = -\infty}$

$\boxed{\frac{+\infty}{c} = +\infty} \quad \boxed{\frac{-\infty}{c} = -\infty}$

$1/x$ $\quad \boxed{c/{+\infty} = 0^+} \quad \boxed{c/{-\infty} = 0^-}$

- $c < 0$ $\quad \boxed{c \cdot (+\infty) = -\infty} \quad \boxed{c \cdot (-\infty) = +\infty}$

$+\infty/c = -\infty \quad -\infty/c = +\infty$

$c/{+\infty} = 0^- \quad c/{-\infty} = 0^+$

$c > 0 \rightarrow \boxed{c/0^+ = +\infty} \quad \boxed{c/0^- = -\infty}$

$c < 0 \rightarrow \boxed{c/0^+ = -\infty} \quad \boxed{c/0^- = +\infty}$

$+\infty + \infty = +\infty \qquad -\infty - \infty = -\infty$

$(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty \quad (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty \quad (-\infty)(-\infty) = +\infty$

$(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$

FORME INDETERMINATE

$+\infty - \infty \overset{?}{=}$ Forma Ind. $\quad 0 \cdot \infty \overset{?}{=}$ Forma Ind. $\quad 0/0 \overset{?}{=}$ Forma Ind. $\quad 0^0 =$ F.I.

$1^\infty = e^{\infty \log 1} = e^{\infty \cdot 0} \overset{?}{=}$ Forma Ind. $\quad \infty^0 = e^{0 \log \infty} = e^{0 \cdot \infty} \overset{?}{=}$ Forma Ind.

Queste forme sono tutte equivalenti

Tra loro