Lezione 15 - Analisi Matematica 1 - 29 ottobre 2013

Def $f: A \to \mathbb{R}$ $\quad x_0$ p.d.a. per A

"f ha limite ℓ per x che tende a x_0"

e si scrive $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$

se $\forall U \in \mathcal{I}_\ell \; \exists V \in \mathcal{I}_{x_0} : f\left((V \setminus \{x_0\}) \cap A\right) \subseteq U$

OSS: x_0 p.d.a. per $A \Rightarrow (V \setminus \{x_0\}) \cap A \neq \emptyset \quad \forall V \in \mathcal{I}_{x_0}$

OSS: LA DEFINIZIONE DI LIMITE

NON PERMETTE DI CALCOLARE IL LIMITE

CALCOLO DEL LIMITE $\neq$ VERIFICA DEL LIMITE

Teorema $f: A \to \mathbb{R}$ $\quad x_0$ p.d.a. per A

Se $\exists\; \ell = \lim_{x \to x_0} f(x)$ allora ℓ è unico

dim.

$x_0 \to +\infty, \; \in \mathbb{R}, \; -\infty \qquad \ell \to +\infty, \; \in \mathbb{R}, \; -\infty \qquad$ 9 casi

Facciamo la dim nel caso $x_0 \in \mathbb{R}$, $\ell_1 \neq \ell_2$, $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$

Porto con $l_1 \neq l_2$

$$\begin{cases} \forall \varepsilon>0\ \exists \delta_1>0 : \forall x\in A \quad |x-x_0|<\delta_1 \Rightarrow -\varepsilon<f(x)-l_1<\varepsilon \\ \forall \varepsilon>0\ \exists \delta_2>0 : \forall x\in A \quad |x-x_0|<\delta_2 \Rightarrow -\varepsilon<f(x)-l_2<\varepsilon \end{cases}$$

$\uparrow$

$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0 : \forall x\in A \quad |x-x_0|<\delta \Rightarrow \begin{cases} -\varepsilon<f(x)-l_1<\varepsilon \\ -\varepsilon<l_2-f(x)<\varepsilon \end{cases}$$

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0 : \forall x\in A \ |x-x_0|<\delta \Rightarrow -2\varepsilon<l_2-l_1<2\varepsilon$$

$\Downarrow$

$$\forall \varepsilon>0 \qquad -2\varepsilon<l_2-l_1<2\varepsilon$$

$$\forall \varepsilon>0 \qquad |l_2-l_1|<2\varepsilon \Leftrightarrow \quad l_1-l_2=0 \Leftrightarrow l_1=l_2$$

(ii) supponiamo $x_0\in\mathbb{R}$ $\quad l_1=-\infty$ e $l_2\in\mathbb{R}$

$$\begin{cases} \forall \varepsilon>0\ \exists \delta_1>0\ \forall x\in A \quad 0<|x-x_0|<\delta_1 \Rightarrow l_2-\varepsilon<f(x)<l_2+\varepsilon \\ \forall M>0\ \exists \delta_2>0\ \forall x\in A \quad 0<|x-x_0|<\delta_2 \Rightarrow f(x)<-M \end{cases}$$

$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$

$$\forall \varepsilon>0\ \forall M>0\ \exists \delta>0 : \forall x\in A \ 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow \begin{cases} l_2-\varepsilon<f(x)<l_2+\varepsilon \\ M<-f(x) \end{cases}$$

" " " " " $\Rightarrow M+l_2-\varepsilon<0<l_2+\varepsilon$

ma questo è manifestamente assurdo non appena $M\geq 2\varepsilon$

(iii) $l_1 \in \mathbb{R}$ $\quad l_2 = +\infty$ $\quad x_0 \in \mathbb{R}$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_1 > 0 : \forall x \in A \quad 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow l_1 - \varepsilon < f(x) < l_1 + \varepsilon$

$\forall M > 0 \ \exists \delta_2 > 0 \quad \forall x \in A \quad 0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow M < f(x)$

$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \forall M > 0 \quad \forall x \in A \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \begin{cases} l_1 - \varepsilon < f(x) < l_1 + \varepsilon \\ -f(x) < -M \end{cases}$$

" " " " $\Rightarrow l_1 - \varepsilon < 0 < l_1 + \varepsilon - M$

e questo è falso quando $\varepsilon - M \leq -\varepsilon$

ovvero $2\varepsilon < M$.

Restano da vedere questi 3 casi quando $x_0 = +\infty$ o $x_0 = -\infty$: questo esercizio viene lasciato allo studente

Vediamo il legame tra limiti e continuità

Teorema

$f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ p.d.a. per A

sono tra loro equivalenti

(i) f continua nel punto x_0

(ii) $\underbrace{\lim_{x \to x_0} f(x)}$ $= f(x_0) = \underbrace{f\left(\lim_{x \to x_0} x\right)}$

dim

(i) $\Rightarrow$ (ii)

$\forall U \in \mathcal{I}_{f(x_0)}\ \exists V \in \mathcal{I}_{x_0} : f(V \cap A) \subseteq U$ ← f continua in x_0

$\Downarrow$ ← $f(\Omega) \subseteq U \Rightarrow \forall B \subset \Omega\ f(B) \subseteq U$

$\forall U \in \mathcal{I}_{f(x_0)}\ \exists V \in \mathcal{I}_{x_0} : f\left(\left(V \setminus \{x_0\}\right) \cap A\right) \subseteq U$ ← $\lim_{x \to x_0} f = f(x_0)$

$\Updownarrow$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

(ii) $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{I}_{f(x_0)}\ \exists V \in \mathcal{I}_{x_0} : f\left(\left(V \setminus \{x_0\}\right) \cap A\right) \subseteq U$

ma $f(x_0) \in U$

$\Rightarrow \forall U \in \mathcal{I}_{f(x_0)}\ \exists V \in \mathcal{I}_{x_0} : f(V \cap A) \subseteq U$

ovvero f continua in x_0 ↯

Def $x_0 \in A$ p.d.a. $f : A \to \mathbb{R}$

"f ha limite ℓ per x che tende a x_0 da sinistra"
e si scrive $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$

se $\forall U \in \mathcal{I}_\ell \; \exists V \in \mathcal{I}_{x_0} : \forall x \in A \quad x \in V \cap]-\infty, x_0[\Rightarrow f(x) \in U$

"f ha limite ℓ per x che tende a x_0 da destra"
e si scrive $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$

se $\forall U \in \mathcal{I}_\ell \; \exists V \in \mathcal{I}_{x_0} : \forall x \in A \quad x \in V \cap]x_0, +\infty[\Rightarrow f(x) \in U$

Teorema $f : A \to \mathbb{R}$ x_0 p.d.a. per A

Sono equivalenti

(i) $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$

(ii) $\exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell_1$ $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell_2$ e $\ell_1 = \ell_2 = \ell$

dim

(i) $\Leftarrow$ (ii)

(i) $\Leftrightarrow$ $\forall U \in \mathcal{J}_\ell \; \exists V \in \mathcal{J}_{x_0} : \forall x \in A \; x \neq x_0 \; x \in V \Rightarrow f(x) \in U$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} \forall U \in \mathcal{J}_\ell \; \exists V \in \mathcal{J}_{x_0} : \forall x \in A \;\; x \in V \cap]-\infty, x_0[\Rightarrow f(x) \in U \\ \forall U \in \mathcal{J}_\ell \; \exists V \in \mathcal{J}_{x_0} : \forall x \in A \;\; x \in V \cap]x_0, +\infty[\Rightarrow f(x) \in U \end{cases}$$

OSS: Il Teorema precedente è utilissimo per provare che $\nexists \lim_{x \to x_0} f(x)$

Infatti, se $\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell_1 \neq \ell_2 = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$

allora $\nexists \lim_{x \to x_0} f(x)$

Esempio Data $f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

provare che $\nexists \lim_{x \to 0} f(x)$

dim

$x_0 = 0$ è p.d.a. per il dom$(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$?

SÌ in quanto $\forall \delta > 0 \; \left( ]-\delta, \delta[\setminus \{0\} \right) \cap \left(\mathbb{R} \setminus \{0\} \right) =$

$= \left( ]-\delta, \delta[\setminus \{0\} \right) \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$

infatti $-\delta/2 \in \left( ]-\delta,\delta[\setminus \{0\} \right) \cap \mathbb{R}$

Voglio calcolare $\lim_{x \to 0^-} f(x)$

Congetturo che $0 = \lim_{x \to 0^-} f(x)$

$\forall U \in \mathcal{I}_0 \ \exists V \in \mathcal{I}_0 : \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad x \in V \cap]-\infty, 0[\Rightarrow f(x) \in U$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \underbrace{x \in]-\delta, 0[}_{} \Rightarrow f(x) \in]-\varepsilon, \varepsilon[$

f è $= 0 \ \forall x < 0$!!

Congetturo che $1 = \lim_{x \to 0^+} f(x)$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad x \in]0, \delta[\Rightarrow f(x) \in]1-\varepsilon, 1+\varepsilon[$

ma questo è vero poiché $\forall x \in]0, \delta[\quad f(x) = 1$

Allora $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0 \neq 1 = \lim_{x \to 0^+} f(x)$

ovvero $\nexists \lim_{x \to 0} f(x)$ ↯

Proviamo che $\lim_{x \to 0} f(x)$ non esiste in un modo $\neq$

1) Se $l \geq \frac{1}{2}$ allora non è vero che $\lim_{x \to 0} f(x) = l$

devo provare

$\exists \varepsilon_0 > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x_\delta \in]-\delta, \delta[\setminus \{0\} : |f(x_\delta) - \ell| \geq \varepsilon_0$

Preso $\varepsilon_0 = 1/4$ $\forall \delta > 0 \ \exists x_\delta = -\delta/2 \in]-\delta, \delta[\setminus \{0\} : |f(x_\delta) - \ell| = |\ell| \geq 1/2 > 1/4 = \varepsilon_0$

(ii) Se $\ell \leq 1/2$ allora non è vero che $\lim_{x \to 0} f(x) = \ell$

debbo provare che

$\exists \varepsilon_0 > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x_\delta \in]-\delta, \delta[\setminus \{0\} : |f(x_\delta) - \ell| \geq \varepsilon_0$

Preso $\varepsilon_0 = 1/4$ $\forall \delta > 0 \ \exists x_\delta = \delta/2 \in]-\delta, \delta[\setminus \{0\} : |f(x_\delta) - \ell| = |1 - \ell| \geq 1/2 > 1/4 = \varepsilon_0$

$\lightning$

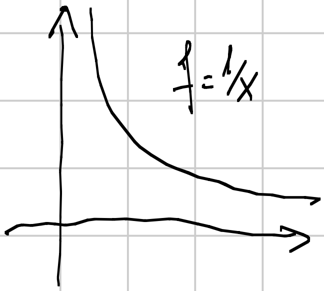
Def: $f: A \to \mathbb{R}$ $\quad x_0$ p.d.a. per A

$\displaystyle\lim_{x \to x_0} f(x) = l^+$

se $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall x \in A \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow l \leq f(x) < l + \varepsilon$

$\displaystyle\lim_{x \to x_0} f(x) = l^-$

se $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall x \in A \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow l - \varepsilon < f(x) \leq l$



Esempio: $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$

dim

Devo provare

$\to \forall U \in \mathcal{J}_0 \; \exists V \in \mathcal{J}_{+\infty} : x \in V \Rightarrow f(x) \in U \cap]0, +\infty[\quad \Updownarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists M > 0 : x \in]M, +\infty[\Rightarrow 1/x \in]0, \varepsilon[\quad \Updownarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists M > 0 : M < x \Rightarrow 0 < \frac{1}{x} < \varepsilon \quad \Updownarrow$

$\quad '' \qquad '' \qquad '' \quad \Rightarrow 1/\varepsilon < x \quad \Updownarrow$

se $x > M$ allora $1/\varepsilon < x$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists M_\varepsilon : M_\varepsilon < x \Rightarrow 1/\varepsilon < x$

mi basta prendere $M_\varepsilon = 1/\varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists M_\varepsilon = 1/\varepsilon : 1/\varepsilon < x \Rightarrow 1/\varepsilon < x$ ✓

Esercizio $f = \begin{cases} x^2+2x, & \text{se } |x| \geq 2 \\ ax-b, & \text{se } |x|<2 \end{cases}$

determinare (se esistono) a e $b \in \mathbb{R}$ t.c.

f sia continua $\forall x \in \mathbb{R}$

dim osservando che $|x| \geq 2 \iff -x \geq 2$ o $x \geq 2$

$|x|<2 \iff -2<x<2$ si ha

$$f(x) = \begin{cases} x^2+2x & x \leq -2 \\ ax-b & -2<x<2 \\ x^2+2x & 2 \leq x \end{cases}$$

Per $x<-2$ $f(x) = x^2+2x$ è un polinomio ed è una funzione continua

$-2<x<2$ $f(x) = ax-b$ è un polinomio, quindi è continua $\forall a,b \in \mathbb{R}$

$2<x$ $f(x) = x^2+2x$ è un polinomio ed è una funzione continua

$x=-2$ $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^-} x^2+2x = 0 = \lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^+} ax-b$

$= -2a-b$

$x=2$ $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} ax-b = 2a-b = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} x^2+2x = 8$

Dunque a e b devono soddisfare

$$\begin{cases} -2a-b=0 \\ 2a-b=8 \end{cases} \quad \begin{cases} -2b=8 \\ a=\frac{b+8}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} b=-4 \\ a=2 \end{cases}$$

Esercizio Determinare (se esistono) $a, b \in \mathbb{R}$ t.c.

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} 1/x & x \in]0,1[\\ ax+b & x \notin]0,1[\end{cases}$$

sia continua su $\mathbb{R}$

Teorema (Algebra dei limiti)

$f, g : A \to \mathbb{R}$ $\quad x_0$ p.d.a. per A

(i) $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = l$; $\exists \lim_{x \to x_0} g(x) = m \Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} (f+g)(x) \overset{(*)}{=} l+m$

(ii) " ; " $\Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) \overset{(**)}{=} l \cdot m$

(iii) " ; " ; $m \neq 0 \Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{l}{m}$

(*) L'uguaglianza non vale quando $l+m = +\infty - \infty$

Forme Indeterminate

(**) L'uguaglianza non vale quando $l \cdot m = 0 \cdot \infty$

Nell'esempio che segue si prova che

$+\infty - \infty$ può assumere $\neq$ valori
$0 \cdot \infty$ " " " "

} sono Forme Indeterminate

N.B. Tutte le Forme Indeterminate sono equivalenti a $0/0$!!

Esempio (forme indeterminate)

(i) $\begin{cases} f(x) = 2x \quad g(x) = -x \\ \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty \\ \lim_{x \to +\infty} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to +\infty} (2x - x) = \lim_{x \to +\infty} x = +\infty \end{cases}$

$\begin{cases} f(x) = x + 5 \quad g(x) = -x \\ \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty \\ \lim_{x \to +\infty} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to +\infty} (x + 5 - x) = 5 \end{cases}$

(ii) $0 \cdot \infty$

$\begin{cases} f(x) = x \quad g(x) = 1/x^2 \\ \lim_{x \to +\infty} x = +\infty \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0^+ \\ \lim_{x \to +\infty} f \cdot g = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} 1/x = 0^+ \end{cases}$

$\begin{cases} f(x) = x \quad g(x) = 1/x \\ \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \to +\infty} g(x) = 0^+ \\ \lim_{x \to +\infty} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \to +\infty} x \cdot 1/x = 1 \end{cases}$

dim (Teorema algebrico)

(i) $\begin{cases} \forall U \in \mathcal{I}_\ell \ \exists V \in \mathcal{I}_{x_0} : x \in A \quad x \in V \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in U \\ \forall \tilde{U} \in \mathcal{I}_m \ \exists \tilde{V} \in \mathcal{I}_{x_0} : x \in A \quad x \in \tilde{V} \setminus \{x_0\} \Rightarrow g(x) \in \tilde{U} \end{cases}$

$x_0 \in \mathbb{R}$ e $\ell, m \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_1 > 0 : x \in A \quad x \in]x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1[\setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[\\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_2 > 0 : x \in A \quad x \in]x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2[\setminus \{x_0\} \Rightarrow g(x) \in]m - \varepsilon, m + \varepsilon[\end{cases}$$

$$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in A \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \begin{cases} |f(x) - \ell| < \varepsilon \\ |g(x) - m| < \varepsilon \end{cases}$$

$$|f(x) + g(x) - (\ell + m)| =$$

Disuguaglianza Triangolare

$$= |(f(x) - \ell) + (g(x) - m)| \leq |f(x) - \ell| + |g(x) - m|$$

vera quando $0 < |x - x_0| < \delta$

$$< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

da cui segue

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in A \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) + g(x) - \ell - m| < 2\varepsilon$$

(ii) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = m$

All'inizio è uguale a quello del caso (i)

$$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in A \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \begin{cases} |f(x) - \ell| < \varepsilon \\ |g(x) - m| < \varepsilon \end{cases}$$

Tolgo e aggiungo = quantità

$$\left|f(x)g(x) - l\cdot m\right| = \left|f(x)g(x) - f(x)m + f(x)m - lm\right|$$

$$= \left|f(x)\left(g(x)-m\right) + m\left(f(x)-l\right)\right|$$

Disug. Triangolare

$$\leq \left|f(x)\cdot\left(g(x)-m\right)\right| + \left|m\left(f(x)-l\right)\right|$$

modulo prodotto = prodotto moduli

$$= |f(x)|\cdot|g(x)-m| + |m|\cdot|f(x)-l|$$

$$\leq |l+\varepsilon|\cdot\varepsilon + |m|\cdot\varepsilon = \varepsilon\left(|m|+|l+\varepsilon|\right)$$

Vero quando $0<|x-x_0|<\delta$

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 : \forall x\in A \quad 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f\cdot g(x) - l\cdot m| \leq \varepsilon\left(|m|+|l+\varepsilon|\right)$$

(iii) Come in (i) e (ii) si ottiene

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 : \forall x\in A \quad 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow \begin{cases} l-\varepsilon< f(x) < l+\varepsilon \\ m-\varepsilon < g(x) < m+\varepsilon \end{cases}$$

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{l}{m}\right| = \left|\frac{m f(x) - l g(x)}{m\cdot g(x)}\right| = \frac{|m f(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - l g(x)|}{|m|\,|g(x)|}$$

$$= \frac{|f(x)\cdot(g(x)-m) + g(x)(f(x)-l)|}{|m|\cdot|g(x)|} \leq \frac{|f(x)|\cdot|g(x)-m| + |g(x)|\,|f(x)-l|}{|m|\,|g(x)|}$$

$$\leq \frac{|l+\varepsilon|\cdot\varepsilon + |m+\varepsilon|\cdot\varepsilon}{|m|\cdot|m-\varepsilon|} = \varepsilon\cdot\frac{|l+\varepsilon|+|m+\varepsilon|}{|m|\cdot|m-\varepsilon|}$$

$0<|x-x_0|<\delta$ & $m-\varepsilon>0$

quantità limitata

e dunque

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 : \forall x\in A \quad 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow \left|\frac{f}{g}(x) - \frac{l}{m}\right| \leq \varepsilon\cdot\frac{|l+\varepsilon|+|m+\varepsilon|}{|m|\,|m-\varepsilon|}$$

$\not{y}$

Teorema (Confronto)

$f, g: A \to \mathbb{R}$ $\quad x_0$ p.d.a per A

(1) $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = l \quad \exists \lim_{x \to x_0} g(x) = m \implies l \leq m$

$f(x) \leq g(x) \; \forall x \in A$

(2) $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \implies \exists \lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$

$f(x) \leq g(x) \; \forall x \in A$

(3) $\exists \lim_{x \to x_0} g(x) = -\infty \implies \exists \lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

$f(x) \leq g(x) \; \forall x \in A$

Teorema (dei 2 Carabinieri)

$f, g, h: A \to \mathbb{R}$ $\quad x_0$ p.d.a per A

$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = l = \lim_{x \to x_0} h(x)$

$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \forall x \in A$

$\implies \exists \lim_{x \to x_0} g(x) = l$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

se $\forall M > 0 \ \exists N > 0 \ : \ x > N \Rightarrow f(x) > M$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 4$$

se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N > 0 \ : \ x > N \Rightarrow 4 - \varepsilon < f(x) < 4 + \varepsilon$

etc.

Teorema (f continua $\Rightarrow$ f localmente limitata)

$f: A \to \mathbb{R}$ $\quad x_0 \in A$

Se f continua in x_0

allora $\exists \delta > 0 \ \exists C = |f(x_0)| + 1 : \ |f(x)| \leq C \ \forall x \in A \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$

dim

f continua in x_0 se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in A \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$

fissato $\varepsilon = 1$ $\ \exists \delta > 0 : x \in A \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\Rightarrow f(x_0) - 1 < f(x) < f(x_0) + 1$

" " " $\quad -|f(x_0)| - 1 < f(x) < |f(x_0)| + 1$

" " " $\quad |f(x)| \leq C = 1 + |f(x_0)|$