Lezione 14 - Analisi Matematica 1 - 28 ottobre 2013

f continua in $x_0 \in A$ $\quad f: A \to \mathbb{R}$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ : \forall x \in A \quad x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\Rightarrow f(x) \in]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[$

$\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$

<u>Def</u> $f: A \to \mathbb{R}$ $\quad x_0 \in A$ sia p.d.a. per A

"f continua in x_0 da sinistra" con valore $f(x_0^-)$

se

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in A \quad x \in]x_0 - \delta, x_0[\Rightarrow f(x) \in]f(x_0^-) - \varepsilon, f(x_0^-) + \varepsilon[$

"f continua in x_0 da destra" con valore $f(x_0^+)$

se

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in A \quad \underbrace{x \in]x_0, x_0 + \delta[} \Rightarrow f(x) \in]f(x_0^+) - \varepsilon, f(x_0^+) + \varepsilon[$

Teorema $f: A \to \mathbb{R}$ $\quad x_0$ p.d.a. per A

Sono tra loro equivalenti

(i) f continua in x_0 con valore $f(x_0)$

(ii) f continua da dx in x_0 con valore $f(x_0^+)$
 " " " sin " " " " $f(x_0^-)$ e $f(x_0^-) = f(x_0^+) = f(x_0)$

<u>Oss</u>: Questo Teorema è utile per provare che f <u>non</u> è continua in x_0

Esercizio $f(x)=\begin{cases}1 & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$ non è continua in $x_0=0$

dim

$\underbrace{f(0^+)=1}_{①} \neq \underbrace{0=f(0^-)}_{②}$

Per provare ①, devo provare

$\$\ \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 : \forall x\in\mathbb{R}\quad x\in]0,\delta[\ \Rightarrow |f(x)-1|<\varepsilon$

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 : \quad x\in]0,\delta[\ \Rightarrow |1-1|=0<\varepsilon$ ✓

qualsiasi

Per provare ② devo provare

$\$\ \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 : \forall x\in\mathbb{R}\quad x\in]-\delta,0[\ \Rightarrow |f(x)-0|<\varepsilon$

$\forall\varepsilon>\ \exists\delta>0 : \quad x\in]-\delta,0[\ \Rightarrow |0-0|=0<\varepsilon$

qualsiasi

Problema: $f:A\to\mathbb{R}$, $x_0\in A$ punto isolato. La funzione f è continua in x_0? SI!!

Per ipotesi: $x_0\in I(A)\Leftrightarrow \exists\tilde{\delta} :]x_0-\tilde{\delta}, x_0+\tilde{\delta}[\ \cap A=\{x_0\}$

Per provare la continuità va provato che

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 : f(]x_0-\delta,x_0+\delta[\ \cap A)\subseteq\ ]f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon[$

ma preso $\delta<\tilde{\delta}$ si ha $]x_0-\delta,x_0+\delta[\ \cap A=\{x_0\}$

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0, \delta<\tilde{\delta} : f(\{x_0\})\subseteq\ ]f(x_0)-\varepsilon,f(x_0)+\varepsilon[$

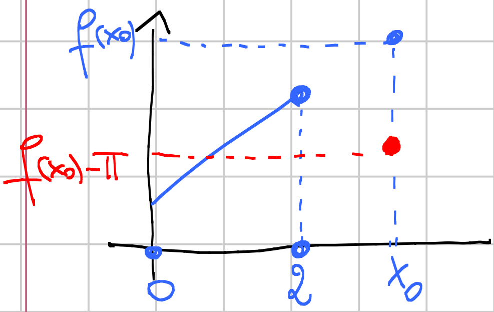
e quest'ultima è certamente vera

Problema: se modifico $f: A \to \mathbb{R}$ nel punto x_0 isolato rispetto ad A, per esempio

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A \setminus \{x_0\} \\ f(x_0) - \pi & x = x_0 \end{cases}$$

la nuova funzione $\tilde{f}$ è continua in x_0? SI!!

Essendo x_0 isolato per A, anche $\tilde{f}$ risulta ancora continua



Ma se modifico $f(x)$ in $x_0 \in A$ x_0 p.d.a. per A?

Problema: data $f(x) = 3x$, sia $\tilde{f}(x) = \begin{cases} 3x & x \neq 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$

$\tilde{f}$ è continua in $x_0 = 1$? NO!

Infatti posto $f(1^-) = 3 = f(1^+)$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \varepsilon/3 \quad x \in]1-\delta, 1[\Rightarrow |3x-3| = 3|x-1| < \varepsilon$ ✓

" " $\quad x \in]1, 1+\delta[\Rightarrow |3x-3| = 3|x-1| < \varepsilon$ ✓

ovvero

(*) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \varepsilon/3 \quad 0 < |x-1| < \delta \Rightarrow |3x-3| = 3|x-1| < \varepsilon$ ✓

OSS (*) è la definizione di $\lim_{x \to 1} 3x = 3$!!

Def $x_0 \in \mathbb{R}$. Un insieme V viene detto

- intorno sinistro di x_0 se $\exists U \in \mathcal{I}_{x_0}$: $V =]-\infty, x_0[\cap U$
- " destro di x_0 se $\exists U \in \mathcal{I}_{x_0}$: $V = U \cap]x_0, +\infty[$

$$\mathcal{I}^-_{x_0} = \{ U \cap]-\infty, x_0[\ : U \in \mathcal{I}_{x_0} \}$$

$$\mathcal{I}^+_{x_0} = \{ U \cap]x_0, +\infty[\ : U \in \mathcal{I}_{x_0} \}$$

Esercizio: $f(x) = |x|$ è continua $\forall x \in \mathbb{R}$

dim

$\$$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow \big| |x| - |x_0| \big| < \varepsilon$

osservando che $\big| |x| - |x_0| \big| < |x - x_0|$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \varepsilon > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow \big| |x| - |x_0| \big| < \varepsilon$ ✓

Per provare la continuità di $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ servono le formule di prostaferesi:

$$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x_0 = \operatorname{sen}\left(\frac{x+x_0}{2} + \frac{x-x_0}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{x+x_0}{2} - \frac{x-x_0}{2}\right)$$

$$= \cancel{\operatorname{sen} \frac{x+x_0}{2} \cos \frac{x-x_0}{2}} + \operatorname{sen} \frac{x-x_0}{2} \cos \frac{x+x_0}{2}$$

$$- \left(\cancel{\operatorname{sen} \frac{x+x_0}{2} \cos \frac{x-x_0}{2}} - \operatorname{sen} \frac{x-x_0}{2} \cos \frac{x+x_0}{2} \right)$$

$$= 2 \operatorname{sen} \frac{x-x_0}{2} \cos \frac{x+x_0}{2}$$

Esercizio $f(x) = \operatorname{sen} x$ è continua $\forall x \in \mathbb{R}$

dim.

Fissato $x_0 \in \mathbb{R}$ va provato

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x_0| < \varepsilon$$

$$|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x_0| = \left| 2 \operatorname{sen} \frac{x - x_0}{2} \cos \frac{x + x_0}{2} \right|$$

$$\leq 2 \cdot \left| \operatorname{sen} \frac{x - x_0}{2} \right| \cdot \left| \cos \frac{x + x_0}{2} \right|$$

$\left| \cos \frac{x + x_0}{2} \right| \leq 1$

$$\leq 2 \cdot \left| \operatorname{sen} \frac{x - x_0}{2} \right|$$

$$\leq 2 \left| \frac{x - x_0}{2} \right| = |x - x_0|$$

$|\operatorname{sen} x| \leq |x|$

dunque $|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x_0| \leq |x - x_0|$, e perciò

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \varepsilon > 0 : \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x_0| < \varepsilon$$

Analogamente

$$\cos x - \cos x_0 = \cos\left(\frac{x+x_0}{2}+\frac{x-x_0}{2}\right) - \cos\left(\frac{x+x_0}{2}-\frac{x-x_0}{2}\right)$$

$$= \cancel{\cos\frac{x+x_0}{2}\cos\frac{x-x_0}{2}} - \operatorname{sen}\frac{x+x_0}{2}\operatorname{sen}\frac{x-x_0}{2}$$

$$-\left(\cancel{\cos\frac{x+x_0}{2}\cos\frac{x-x_0}{2}} + \operatorname{sen}\frac{x+x_0}{2}\operatorname{sen}\frac{x-x_0}{2}\right)$$

$$= -2\operatorname{sen}\frac{x+x_0}{2}\operatorname{sen}\frac{x-x_0}{2}$$

Esercizio: $\cos x$ è continua $\forall x \in \mathbb{R}$

dim.

Fissato $x_0 \in \mathbb{R}$ bisogna provare che

$$\$ \quad \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0 : |x-x_0|<\delta \Rightarrow |\cos x - \cos x_0| < \varepsilon$$

$$|\cos x - \cos x_0| = \left|-2\operatorname{sen}\frac{x+x_0}{2}\operatorname{sen}\frac{x-x_0}{2}\right|$$

$$= 2\left|\operatorname{sen}\frac{x+x_0}{2}\right|\left|\operatorname{sen}\frac{x-x_0}{2}\right|$$

$\left|\operatorname{sen}\frac{x-x_0}{2}\right| \le 1$

$$\le 2\left|\operatorname{sen}\frac{x-x_0}{2}\right|$$

$$\le 2\left|\frac{x-x_0}{2}\right| = |x-x_0|$$

$\left|\operatorname{sen}\frac{x-x_0}{2}\right| \le \left|\frac{x-x_0}{2}\right|$ e dunque preso $\delta = \varepsilon$

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0 : |x-x_0|<\delta \Rightarrow |\cos x - \cos x_0| < \varepsilon$$

↯

Teorema (Algebra delle funzioni continue)

$f, g : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$

1) f e g continue in x_0 $\Rightarrow$ $(f+g)$ continua in x_0

$$(f+g)(x_0) = f(x_0) + g(x_0)$$

2) " " " " " $\Rightarrow$ $(f \cdot g)$ continua in x_0

$$(f \cdot g)(x_0) = f(x_0) \cdot g(x_0)$$

3) " " " " " e $g(x_0) \neq 0$ $\Rightarrow$ $\frac{f}{g}$ continua in x_0

e $$\left(\frac{f}{g}\right)(x_0) = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$$

Esercizio $f(x) = x^n$ è continua $\forall x \in \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

dim

$n=0$ $f(x)=1$ che è continua

$n=1$ $f(x)=x$ " " "

Suppongo (Hp. Induttiva) $f(x)=x^n$ è continua $\forall x \in \mathbb{R}$

Voglio provare che $g(x)=x^{n+1}$ è continua $\forall x \in \mathbb{R}$

$g(x) = x \cdot x^n = h(x) \cdot f(x)$ dove $h(x)=x$ è continua $\forall x \in \mathbb{R}$
$f(x)=x^n$ è continua $\forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow g(x)=x \cdot x^n$ è continua perché prodotto di funzioni continue

Esercizio: Posto

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ $\quad a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0,1,\dots,n$

$P(x)$ è continua $\forall x \in \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

dim

x^n è una funzione continua $\forall x \in \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$a_n \cdot x^n$ è continua $\forall x \in \mathbb{R}$: è il prodotto di una funzione costante - e dunque continua - con una funzione continua

$\Rightarrow P(x)$ è continua poiché somma di f.ni continue

Verso la def. di limite

$f: A \to \mathbb{R}$ $\quad x_0 \in \mathbb{R}$ $\quad x_0$ p.d.a. per A, $x_0 \notin A$

f non è definita in x_0

Definiamo $\quad \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A \\ \ell & x = x_0 \end{cases}$

Come determinare ℓ? Chiediamo

che $\tilde{f}(x)$ sia continua in x_0

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : x \in A \cup \{x_0\} \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |\tilde{f}(x) - \tilde{f}(x_0)| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : x \in A \cup \{x_0\} \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |\tilde{f}(x) - \ell| < \varepsilon$

ma $|\tilde{f}(x_0) - \ell| = 0 < \varepsilon$, quindi è sufficiente testare $\tilde{f}$ in $x \in A : 0 < |x - x_0| < \delta$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : x \in A \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

$\quad$ " $\quad$ " $\quad x \in A \quad x \in \underbrace{]x_0 - \delta, x_0 + \delta[}_{\in\, \mathcal{I}_{x_0}} \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in \underbrace{]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[}_{\in\, \mathcal{I}_\ell}$

$\forall U \in \mathcal{I}_\ell \; \exists V \in \mathcal{I}_{x_0} : \forall x \in A, \; x \in V \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in U$

$\quad$ " $\quad$ " $\quad f((V \setminus \{x_0\}) \cap A) \subseteq U$

Def $f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ p.d.a. per A, $\ell \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

"f ha limite ℓ per x che tende a x_0" e si scrive $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$

se $\forall U \in \mathcal{I}_\ell \; \exists V \in \mathcal{I}_{x_0} : f((V \setminus \{x_0\}) \cap A) \subseteq U$

Teorema (Unicità del limite)

$f: A \to \mathbb{R}$ $\quad x_0$ p.d.a. per A

Se $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ allora l è unico

dim.

Non è restrittivo supporre $x_0 \in \mathbb{R}$.

Per assurdo $\exists\, l_1 \neq l_2$

1) $l_1 = -\infty$ e $l_2 \in \mathbb{R}$

$\forall M > 0\ \exists \delta_1 > 0 : x \in]x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1[\Rightarrow f(x) < -M$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_2 > 0 : x \in]x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2[\Rightarrow l_2 - \varepsilon < f(x) < l_2 + \varepsilon$

preso $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$

$$\forall M > 0\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\Rightarrow \begin{cases} f(x) < -M \\ -l_2 - \varepsilon < -f(x) < -l_2 + \varepsilon \end{cases}$$

$\quad$ " $\quad$ " $\quad$ " $\quad$ " $\quad -l_2 - \varepsilon < 0 < -M - l_2 + \varepsilon$

ovvero $\quad M < 2\varepsilon$ $\quad$ ASSURDO:

M può essere grande a piacere

2) $l_1 \in \mathbb{R}$ $\quad l_2 = +\infty$ $\quad$ si arriva all'assurdo come in 1)

3) $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$ $\quad l_1 \neq l_2$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_1 > 0 : |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow l_1 - \varepsilon < f(x) < l_1 + \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_2 > 0 : |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow l_2 - \varepsilon < f(x) < l_2 + \varepsilon$

$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow \begin{cases} -\varepsilon < f(x) - l_1 < \varepsilon \\ -\varepsilon < f(x) - l_2 < \varepsilon \end{cases}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow \begin{cases} -\varepsilon < l_1 - f(x) < \varepsilon \\ -\varepsilon < f(x) - l_2 < \varepsilon \end{cases}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \quad -2\varepsilon < l_1 - l_2 < 2\varepsilon$$

Per l'arbitrarietà di ε si ha $l_1 = l_2$