

# Lezione 13 - Analisi Matematica 1 - 28 ottobre 2013

## Topologia

$U$  intorno di  $x_0$   $\Leftrightarrow \exists ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[ \subset U$

$U$  " "  $+\infty$   $\Leftrightarrow \exists ]a, +\infty[ \subset U$

$U$  " "  $-\infty$   $\Leftrightarrow \exists ]-\infty, b[ \subset U$

In particolare

$$]x_0 - \delta, x_0 + \delta[ \in \mathcal{I}_{x_0}$$

$$]a, +\infty[ \in \mathcal{I}_{+\infty}$$

$$]-\infty, b[ \in \mathcal{I}_{-\infty}$$

$$\mathcal{I}_{x_0} = \{\text{intorni di } x_0\} \leftarrow \mathcal{I}_{+\infty} \quad \mathcal{I}_{-\infty}$$

$$x_0 \in \mathcal{I}(A) \Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{I}_{x_0} \quad U \cap A \neq \emptyset \quad U \cap A^c \neq \emptyset$$

$$\bullet \mathcal{I}(A) = \mathcal{I}(A^c) = \text{Frontiera di } A = \text{Frontiera di } A^c$$

~~def~~  $A$  chiuso  $\Leftrightarrow \mathcal{I}(A) \subseteq A$

~~def~~  $\bar{A} = A \cup \mathcal{I}(A) = \text{Chiusura di } A$

oss  $\bar{A}$  è chiuso & ben unico

oss  $A$  è chiuso  $\Leftrightarrow A = \bar{A}$  & piccolo Teorema

~~def~~  $A$  aperto  $\Leftrightarrow A^c$  chiuso  $\Leftrightarrow \mathcal{I}(A^c) = \mathcal{I}(A) \subseteq A^c$

~~def~~  $\mathring{A} = A \setminus \mathcal{I}(A) = \text{Interno di } A$

oss  $\mathring{A}$  è aperto

oss  $A$  è aperto  $\Leftrightarrow A = \mathring{A}$

Teorema  $A$  aperto  $\Rightarrow \forall x_0 \in A \exists ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[ \subseteq A$

$$\mathcal{I}(A) \cap A = \emptyset$$



Def  $x_0$  punto di accumulazione per  $A$  se  $\forall U \in \mathcal{I}_{x_0} (U \setminus \{x_0\}) \cap A \neq \emptyset$   
 $D(A)$  = derivato di  $A = \{x_0 \in \mathbb{R} : x_0 \text{ di accumulazione per } A\}$

Qm  $x_0 \in D(A)$  può stare in  $A$  o nel  $\bar{A}$ !

Def  $x_0 \in A$  punto isolato di  $A$  se  $\exists U \in \mathcal{I}_{x_0} : U \cap A = \{x_0\}$   
 $I(A)$  = isolato di  $A = \{x_0 \in A : x_0 \text{ punto isolato per } A\}$

Qm  $\bar{A} = I(A) \cup D(A)$  [ovvero  $x_0 \in A$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{è isolato} \\ \text{oppure} \\ \text{è di accumulazione} \end{array} \right.$ ]

Teorema  $x_0 \in \bar{A} \Rightarrow x_0 \in D(A)$  ( $x_0$  è p.d.a.)

dim

$x_0 \in \bar{A} \Rightarrow \exists \tilde{\delta} > 0 : ]x_0 - \tilde{\delta}, x_0 + \tilde{\delta}[ \subseteq \bar{A}$   $\leftarrow$  ipotesi

$\nexists \forall \delta > 0 (]x_0 - \delta, x_0 + \delta[ \setminus \{x_0\}) \cap \bar{A} \neq \emptyset$

$\forall \delta > 0$  (i)  $\delta > \tilde{\delta} \Rightarrow ]x_0 - \tilde{\delta}, x_0 + \tilde{\delta}[ \subseteq ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$   
 $\Rightarrow (]x_0 - \delta, x_0 + \delta[ \setminus \{x_0\}) \cap \bar{A} \neq \emptyset$

(ii)  $\delta \leq \tilde{\delta} \Rightarrow (]x_0 - \delta, x_0 + \delta[ \setminus \{x_0\}) \cap \bar{A} \neq \emptyset$

Oss: Se  $A$  è aperto allora  $\bar{A} = A$

allora  $\forall x_0 \in A, x_0 \in D(A)$   
 allora  $A = D(A)$

Oss: se  $\#A < +\infty$  allora  $I(A) = A$   
 e  $D(A) = \emptyset$   
 (numero di elementi)

dim

1)  $x_0 \in A \Rightarrow \exists x_0 \text{ è isolato}$  (dunque  $A \cap D(A) = \emptyset$ )

Sia  $A = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  e poniamo  $\delta = \min\{|x_0 - x_1|, |x_0 - x_2|, \dots, |x_0 - x_n|\}$

Per come ho costruito  $\delta$ !  
 $\downarrow$   
 $\big]x_0 - \delta, x_0 + \delta[ \cap A = \{x_0\}$  ovvero  $x_0$  è isolato

2)  $\bar{x} \notin A \Rightarrow \exists \bar{x} \in D(A)$  (dunque  $A \cap D(A) = \emptyset$ )

$A = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$

Poniamo  $\delta = \min\{|\bar{x} - x_0|, |\bar{x} - x_1|, \dots, |\bar{x} - x_n|\}$

Per costruzione di  $\delta$ !  
 $\downarrow$   
 $\big]\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta[ \cap A = \emptyset$

Oss: Se  $A$  è finito allora  $A$  non ha  
 punti di  
 accumulazione  
 passando a  $\mathbb{R}$  come minimo

Se  $A$  possiede un p.d.a, allora  $\#A = +\infty$

Vale il seguente Teorema

Teorema  $A \subseteq \mathbb{R}$

$$D(A) \neq \emptyset \Rightarrow \#A = +\infty$$

dim

$$\text{costruiremo } B \subseteq A \quad \#B = +\infty$$

Per ipotesi:  $D(A) \neq \emptyset \Rightarrow \exists x_0 \in D(A) \Rightarrow$

$$\forall \delta > 0 \quad (]x_0 - \delta, x_0 + \delta[ \setminus \{x_0\}) \cap A \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow \exists a_1 \in A \quad 0 < |x_0 - a_1| < \delta$$

Preso  $\delta_1 = |x_0 - a_1| < \delta$ , essendo  $x_0$  p.d.a. per  $A$   $(]x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1[ \setminus \{x_0\}) \cap A \neq \emptyset$

$$\Rightarrow \exists a_2 \in A \quad \overset{x_0 \neq a_2}{0 < |x_0 - a_2|} < \overset{a_2 \neq a_1}{|x_0 - a_1|} = \delta_1 < \delta$$

Preso  $\delta_2 = |x_0 - a_2| < \delta_1$ , essendo  $x_0$  p.d.a. per  $A$   $(]x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2[ \setminus \{x_0\}) \cap A \neq \emptyset$

$$\Rightarrow \exists a_3 \in A \quad \overset{x_0 \neq a_3}{0 < |x_0 - a_3|} < \overset{a_3 \neq a_2}{|x_0 - a_2|} = \delta_2 < \delta_1 < \delta$$

-----

$$\Rightarrow \exists a_m \in A \quad 0 < |x_0 - a_m| < |x_0 - a_{m-1}| = \delta_{m-1}$$

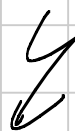
Preso  $\delta_m = |x_0 - a_m| < \delta_{m-1}$ , essendo  $x_0$  p.d.a. per  $A$   $(]x_0 - \delta_m, x_0 + \delta_m[ \setminus \{x_0\}) \cap A \neq \emptyset$

$$\Rightarrow \exists a_{m+1} \in A \quad 0 < |x_0 - a_{m+1}| < |x_0 - a_m| < \delta_{m-1} < \dots < \delta$$

In tal modo si è costruito

$$B = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_m, \dots\} \subseteq A$$

$$\text{con } \#B = +\infty$$



Esempio

$$A = \left\{ \frac{1}{n} : n \geq 1 \right\}, \quad 0 \in D(A) \text{ e infatti } \#A = \infty$$

$$\text{Oss: } \forall \delta > 0, \quad \#(A \cap ]-\delta, \delta]) = +\infty$$

Esempio

$$I(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$$

$$D(\mathbb{N}) = \{+\infty\}$$

dim

• Che  $I(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$  segue dal fatto che  
 $\forall n \in \mathbb{N}, \quad ]n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}] \cap \mathbb{N} = \{n\}$

• Che  $+\infty \in D(\mathbb{N})$  segue dal fatto che

$$\forall ]a, +\infty[ \in \mathcal{I}_{+\infty} \quad ]a, +\infty[ \cap \mathbb{N} \neq \emptyset$$

• Che  $D(\mathbb{N}) = \{+\infty\}$  va provato osservando  
che  $\forall x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}, \exists v \in \mathcal{I}_{x_0} : v \cap \mathbb{N} = \emptyset$

$$\left( \begin{array}{l} \text{si ricordi che } \forall x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N} \quad \lfloor x_0 \rfloor < x_0 < \lfloor x_0 \rfloor + 1 \\ \text{dove } \lfloor x_0 \rfloor = \text{parte intera di } x_0 \\ \quad = \max \{ m \in \mathbb{N} : m \leq x_0 \} \end{array} \right)$$

Teorema (l'estremo superiore <sup>di un insieme A</sup> è un punto di accumulazione)

$$A \subseteq \mathbb{R} \quad \Lambda = \sup A$$

Se  $\Lambda \notin A$  allora  $\Lambda \in D(A)$   
 $\uparrow$   
 dim

1)  $\Lambda = +\infty$

$\Lambda = \sup A \implies \forall M > 0 \exists a_M \in A \quad M < a_M$  ~~caratt. sup A~~

$\implies \forall M > 0 \quad ]M, +\infty[ \cap A \neq \emptyset$  ~~caratt. sup A~~

$\implies +\infty \in D(A)$

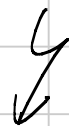
2)  $\Lambda \in \mathbb{R}$   
 $\Lambda \notin A$

$\implies \left\{ \begin{array}{l} q < \Lambda \quad \forall q \in A \\ \forall \varepsilon > 0 \exists q_\varepsilon \in A \quad \Lambda - \varepsilon < q_\varepsilon \end{array} \right.$   
 non può essere = poiché  $\Lambda \notin A$

$\implies \forall \varepsilon > 0 \exists q_\varepsilon \in A \quad \Lambda - \varepsilon < q_\varepsilon < \Lambda < \Lambda + \varepsilon$

$\implies \forall \varepsilon > 0 \exists q_\varepsilon \in A \cap (\Lambda - \varepsilon, \Lambda + \varepsilon \setminus \{\Lambda\})$

$\implies \forall \varepsilon > 0 \quad A \cap (\Lambda - \varepsilon, \Lambda + \varepsilon \setminus \{\Lambda\}) \neq \emptyset$



$$f: A \rightarrow \mathbb{R} \quad x_0 \in A \quad A \subseteq \mathbb{R}$$

Def:  $f$  continua nel punto  $x_0$  se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0 : \forall x \in A, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in A \quad x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \Rightarrow f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$$

$$\bullet \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad x \in ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[ \Rightarrow f(x) \in ]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[$$

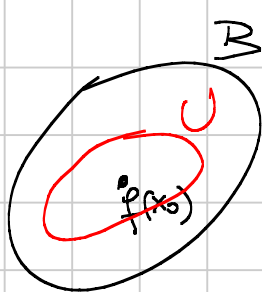
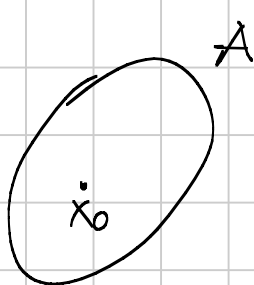
$$\text{m\u0103} \quad ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[ \in \mathcal{I}_{x_0} \quad ]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[ \in \mathcal{I}_{f(x_0)}$$

$$\bullet \quad \forall U \in \mathcal{I}_{f(x_0)} \exists V \in \mathcal{I}_{x_0} : \underbrace{\forall x \in A \quad x \in V \Rightarrow f(x) \in U}_{x \in A \cap V \Rightarrow f(x) \in U}$$

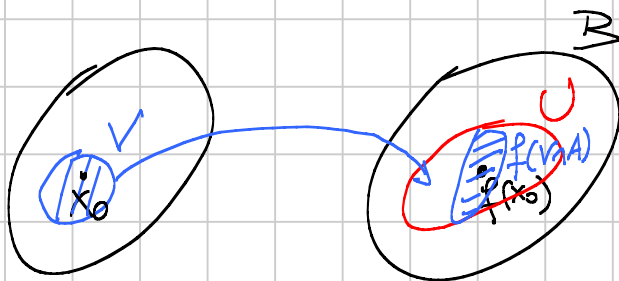
$$\forall U \in \mathcal{I}_{f(x_0)} \exists V \in \mathcal{I}_{x_0} : f(V \cap A) \subseteq U$$

Questa \u00e9 la def. di continuit\u00e0

valid\u0103 in generale  $\left( \begin{array}{l} \text{non v\u0103le s\u00b0 in } \mathbb{R}, \\ \text{m\u0103 in general\u0103 v\u0103le} \\ \text{in un qu\u00e2rles\u00b0 sp\u00e2\u00b0} \\ \text{topologic} \end{array} \right)$



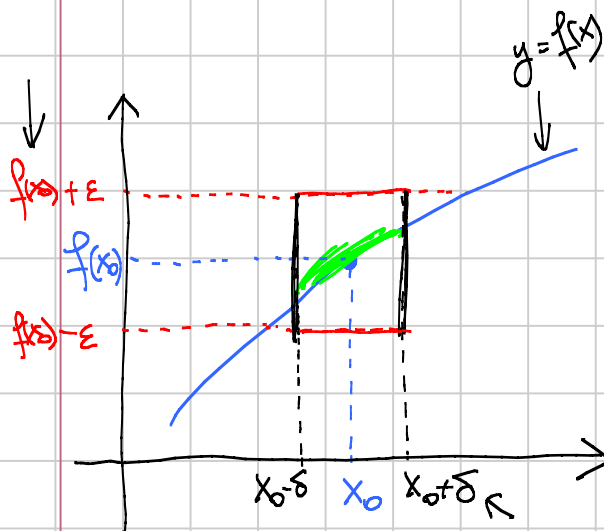
Si fissa  $U \in \mathcal{I}_{f(x_0)}$



Si determina  
 $V \in \mathcal{I}_{x_0}$   
 in modo che  
 $f(V \cap A) \subset U$

Def  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $B \subseteq A$   $f|_B$  si dice

"Restrizione di  $f$  a  $B$ " se  $f|_B: B \rightarrow \mathbb{R}$   
 $f|_B(x) = f(x) \quad \forall x \in B$



Graficamente  
 la continuit  equivale  
 a dire che il  
 grafico di  
 $f|_{[x_0 - \delta, x_0 + \delta]}$   
   contenuto nel rettangolo

$$[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon]$$

ovvero

$$\{(x, f(x)) : x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]\} \subseteq [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon]$$

Esempio:  $f(x) = 3x$    continua  $\forall x \in \mathbb{R}$   
 dim.

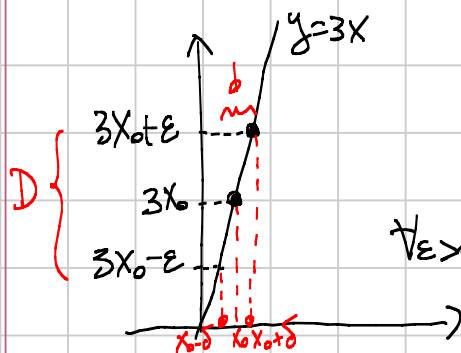
Fisso  $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta = \delta(\epsilon, x_0) > 0 : \forall x \in \mathbb{R} \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta = \epsilon/3 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |3x - 3x_0| = 3|x - x_0| < \epsilon$$

devo trovare  $\delta = \delta(\epsilon, x_0)$

$$\boxed{\delta = \frac{\epsilon}{3}}$$



$$\delta = 3\epsilon$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta = \epsilon/3 \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |3x - 3x_0| = 3|x - x_0| < \epsilon$$

Q.E.D.

Oss  $\delta = \frac{\epsilon}{3}$  ovvero  $\delta = \delta(\epsilon)$  (non dipende da  $x_0$ )

Esercizio Provare che  $f(x) = \frac{x}{2}$  è continua  $\forall x \in \mathbb{R}$

(non  $\delta = 2\epsilon$ )

Esercizio  $f(x) = 5$  è continua  $\forall x \in \mathbb{R}$

dimo

Fisso  $x_0 \in \mathbb{R}$  devo provare

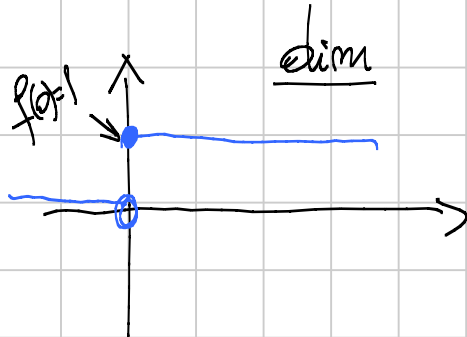
$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta = \delta(\epsilon, x_0) > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta = \delta(\epsilon, x_0) > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |5 - 5| = 0 < \epsilon$$

$\delta$  può essere scelto a piacere : res.  $\delta = 1$  ⚡

Oss NON TUTTE LE FUNZIONI SONO CONTINUE

Esempio  $f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$  non è continua  
in  $x_0 = 0$



$f$  continue in  $x_0 = 0$

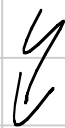
$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon, 0) > 0 : |x - 0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(0)| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon, 0) > 0 : |x| < \delta \Rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon$$

$f$  non è continue in  $x_0 = 0$  : devo negare la def. di continuità

$$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \delta > 0 \left[ \exists x_\delta \in ]-\delta, \delta[ \text{ e } |f(x_\delta) - 1| \geq \varepsilon_0 \right]$$

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{2} (< 1) : \forall \delta > 0 \exists x_\delta = -\frac{\delta}{2} \in ]-\delta, \delta[ \text{ e } |f(x_\delta) - 1| = |0 - 1| = 1 \geq \frac{1}{2}$$

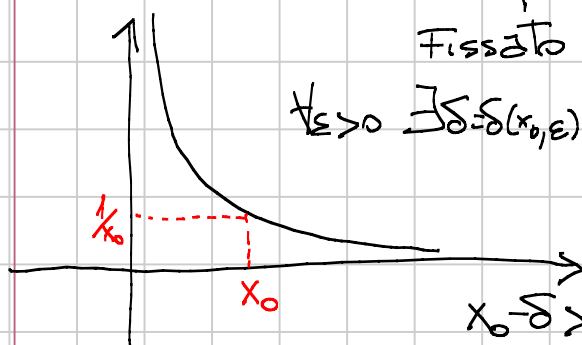


Nell'esempio che segue  $\delta = \delta(x_0, \varepsilon)$  : vedremo che  $\delta$  varia al variare di  $x_0$  ed  $\varepsilon$ .

Esempio  $f(x) = \frac{1}{x}$  è continua  $\forall x \neq 0$

dim

Osservando che  $f(x) = -f(-x) \forall x \neq 0$ , è sufficiente studiare la continuità quando  $x > 0$



Fissato  $x_0 > 0$ , si deve provare che

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0 : \forall x \neq 0 \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right| < \varepsilon$$

Si può scegliere  $\delta > 0$  T.c.

$$x_0 - \delta > 0, \text{ ovvero } \boxed{x_0 > \delta > 0}$$

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right| = \frac{|x_0 - x|}{|x \cdot x_0|} \stackrel{x > 0}{=} \frac{|x - x_0|}{x \cdot x_0} < \frac{\delta}{x \cdot x_0} < \frac{\delta}{x_0(x_0 - \delta)}$$

$$0 < x_0 - \delta < x \Leftrightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{x_0 - \delta}$$

donc

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right| < \frac{\delta}{x_0(x_0 - \delta)} \quad \text{quando } x \in ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[ \text{ e } x_0 - \delta > 0$$

$$\stackrel{||}{|f(x) - f(x_0)|}$$

$$\text{Se } \begin{cases} \frac{\delta}{x_0(x_0 - \delta)} < \varepsilon \\ |x - x_0| < \delta \\ 0 < \delta < x_0 \end{cases} \text{ allora } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$$\frac{\delta}{x_0(x_0 - \delta)} < \varepsilon \quad \text{per } \delta < \varepsilon x_0^2 - \varepsilon x_0 \delta$$

$$\text{per } \delta(1 + \varepsilon x_0) < \varepsilon x_0^2$$

$$\text{per } \delta < \frac{\varepsilon x_0^2}{1 + \varepsilon x_0}$$

$$\text{Preso } \delta = \min \left\{ \frac{x_0}{2}, \frac{1}{2} \frac{\varepsilon x_0^2}{1 + \varepsilon x_0} \right\} = \delta(\varepsilon, x_0)$$

si ha che

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right| < \varepsilon$$

$$\text{Oss: preso } \varepsilon = 1 \quad x_0 = 10 \quad \delta = \min \left\{ 5, \frac{1}{2} \frac{100}{11} \right\}$$

$$= \frac{100}{22} \sim 5$$

Si vede bene che,  
a parità di  $\varepsilon$   
( $\varepsilon = 1$  fissato)

$\delta$  cresce al crescere

di  $x_0$  !!

$$x_0 = 100 \quad \delta = \min \left\{ 50, \frac{1}{2} \frac{10.000}{101} \right\}$$

$$= \frac{10.000}{202} \sim 50$$

$$x_0 = 1 \quad \delta = \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\}$$

$$= \frac{1}{4} = 0,25$$