Analisi Matematica 1 - 24 ottobre 2013

Titolo nota 22/10/2013

Def $x_0 \in \mathbb{R}$ si dice che "U è un intorno.

se $\exists\ ]x_0-\delta, x_0+\delta[\subseteq U$

$\mathcal{I}_{x_0} = \{$insieme di tutti gli intorni di $x_0\}$

Oss Nelle dimostrazioni ci si può limitare a considerare $]x_0-\delta, x_0+\delta[$

$]x_0-2\delta, x_0+3\delta[\in \mathcal{I}_{x_0}$

Oss preso $x_0 \in \mathbb{R}$, $]x_0-\delta, x_0+\delta[$ è un intorno di x_0 $\forall \delta > 0$

Esempio $A =]-2,3[$

1) è un intorno di 1 : infatti, se $\delta = 1$ $\quad]1-1, 1+1[\subset]-2,3[$
2) " " " " -1 : " se $\delta = \frac{1}{2}$ $\quad]-1-\frac{1}{2}, -1+\frac{1}{2}[\subset]-2,3[$
3) " " " " 2 : " se $\delta = \frac{1}{2}$ $\quad]2-\frac{1}{2}, 2+\frac{1}{2}[\subseteq]-2,3[$
4) NON è un intorno di -2 " $\forall \delta > 0$ $\ ]-2-\delta, -2] \cap A = \emptyset$
5) " " " " " 4 " $\forall \delta > 0$ $\ ]4, 4+\delta[\cap A = \emptyset$

Def $x_0 = +\infty$: si dice che "U è un intorno di $+\infty$"

se $\exists\ \underbrace{]a, +\infty[}\ \subseteq U$ ($+\infty$ ha SOLO intorni sinistri)

$x_0 = -\infty$: si dice che "U è un intorno di $-\infty$"

se $\exists\ ]-\infty, b[\subseteq U$ ($-\infty$ ha solo intorni destri)

Oss: $]-\infty, b[$ è un intorno di $-\infty$ $\forall b$

$]a, +\infty[$ " " " " $+\infty$ $\forall a$

In generale

$\mathcal{I}_{x_0} = \{$tutti gli intorni di $x_0\}$ $\qquad x_0 \in \overline{\mathbb{R}} = \overline{\mathbb{R}} \cup \{\pm\infty\}$

$\mathbb{R}$ esteso

Def Dato $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$

un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ si dice "punto di frontiera"

per A se $\forall U \in \mathcal{I}_{x_0}$ $\quad U \cap A \neq \emptyset$ e $U \cap \complement A \neq \emptyset$

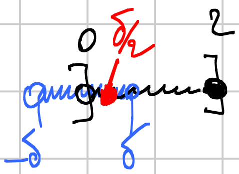
$$\mathcal{F}(A) = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ di frontiera per } A\}$$

Oss $\mathcal{F}(A) = \mathcal{F}(\complement A)$ (Evidente)

Oss $x_0 \in \mathcal{F}(A)$ può $\in A$ / $\notin A$

Esempio $\quad A =]0,2] \qquad 0 \in \mathcal{F}(A)$ e $0 \notin A$.
$\qquad 1 \in \mathcal{F}(A)$ e $1 \in A$.

$0 \in \mathcal{F}(A)$ infatti, $\quad A \cap]0-\delta, 0+\delta[=]-\delta, \delta[\cap A \ni \min\{\frac{\delta}{2}, 1\}$



$$\complement A \cap]-\delta, \delta[\ni -\frac{\delta}{2}$$

Def (Insieme Chiuso)

$A \subseteq \mathbb{R}$ si dice "chiuso" se $\mathcal{F}(A) \subseteq A$

$\overline{A} = A \cup \mathcal{F}(A) \equiv$ "chiusura di A"

Oss: A chiuso sse $\overline{A} = A$

A chiuso $\overset{\text{def}}{\iff} \mathcal{F}(A) \subseteq A \Rightarrow \overline{A} = A \cup \mathcal{F}(A) = A$

$A = \overline{A} \Rightarrow A = A \cup \mathcal{F}(A) \Rightarrow \mathcal{F}(A) \subseteq A \Rightarrow A$ chiuso

Def (Insieme Aperto)

$A \subseteq \mathbb{R}$ si dice "Aperto" se $\complement A$ è chiuso (cioè $\mathcal{F}(A) \subset \complement A$)

L'insieme $\mathring{A} = A \setminus \mathcal{F}(A)$ è detto "Interno di A"

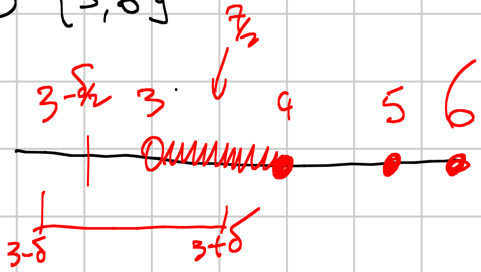
Oss: $\mathring{A}$ è aperto

$$\mathring{A} = A \setminus \mathcal{F}(A) \Rightarrow \mathcal{F}(A) \cap \mathring{A} = \emptyset \Rightarrow \mathcal{F}(A) \subset \complement \mathring{A} \Rightarrow \complement \mathring{A} \text{ è chiuso} \Rightarrow \mathring{A} \text{ aperto}$$

Oss: A è aperto sse $A = \mathring{A}$ <u>x casa.</u>

Esempio: Dato $A =]3,4] \cup \{5,6\}$

Calcolare $\mathcal{F}(A)$, $\bar{A}$, $\mathring{A}$



<u>dim.</u>

$\mathcal{F}(A) = \{3,4,5,6\}$

$\forall \delta > 0 \quad]3-\delta, 3+\delta[\cap A \neq \emptyset$ infatti

Esame di 3

$$\left.\begin{array}{l} \forall \delta > 0 \quad \min\{3+\frac{\delta}{2} ; \frac{7}{2}\} \in]3-\delta, 3+\delta[\cap A \\ \quad e \\ \forall \delta > 0 \quad 3-\frac{\delta}{2} \in]3-\delta, 3+\delta[\cap \complement A \end{array}\right\} \Rightarrow 3 \in \mathcal{F}(A)$$

Esame di 4

$$\left.\begin{array}{l} \max\{4-\frac{\delta}{2} ; \frac{7}{2}\} \in]4-\delta, 4+\delta[\cap A \\ \min\{4+\frac{\delta}{2} ; \frac{9}{2}\} \in]4-\delta, 4+\delta[\cap \complement A \end{array}\right\} \Rightarrow 4 \in \mathcal{F}(A)$$

Esame di 5

$$\left.\begin{array}{l} 5 \in]5-\delta, 5+\delta[\cap A \\ \min\{5+\frac{\delta}{2}, \frac{11}{2}\} \in]5-\delta, 5+\delta[\cap \complement A \end{array}\right\} \Rightarrow 5 \in \mathcal{F}(A)$$

Estremi di 6

$6 \in]6-\delta, 6+\delta[\cap A$

$6+\delta/2 \in]6-\delta, 6+\delta[\cap \complement A$ $\Big\} \Rightarrow 6 \in \mathcal{F}(A)$

ORA DEVO PROVARE $\forall x \notin \{3,4,5,6\}$ $x \notin \mathcal{F}(A)$

$x_0 < 3$: $\delta = 3 - x_0$ $]x_0-\delta, x_0+\delta[\cap A = \emptyset \Rightarrow x_0 \notin \mathcal{F}(A)$

$]x_0+x_0-3, x_0+3-x_0[$

$]2x_0-3, 3[$

$3 < x_0 < 4$ $\delta = \min\{4-x_0, x_0-3\}$

$]x_0-\delta, x_0+\delta[\subseteq A$ $\Rightarrow x_0 \notin \mathcal{F}(A)$

$]x_0-\delta, x_0+\delta[\cap \complement A = \emptyset$

$\delta = \min\{4-x_0, x_0-3\}$

1) $\delta = 4-x_0 < x_0-3$ $]x_0-\delta, x_0+\delta[=]x_0-4+x_0, x_0+4-x_0[$

$\Updownarrow$

$x_0-4 > 3-x_0$ $=]2x_0-4, 4[\subseteq]3,4[$

$2x_0-4 = x_0+x_0-4 > x_0+3-x_0 = 3$

2) $\delta = \underbrace{x_0-3 < 4-x_0}$ $]x_0-\delta, x_0+\delta[=]x_0-x_0+3, x_0+x_0-3[$

$=]3, 2x_0-3[\subseteq]3,4[$

$2x_0-3 = x_0+x_0-3 < x_0+4-x_0 = 4$

$4 < x_0 < 5$ $\delta = \min\{5-x_0, x_0-4\}$ $\Rightarrow x_0 \notin \mathcal{F}(A)$

$]x_0-\delta, x_0+\delta[\subseteq \complement A$

$]x_0-\delta, x_0+\delta[\cap A = \emptyset$

$\sum_{k=0}^{2} j^2 = 0^2 + 1^2 + \boxed{2^2}$

$5 < x_0 < 6$ analogo

$\sum_{k=0}^{1} j^2 + 2^2$

$\mathring{A} = A \setminus \mathcal{F}(A) =]3,4[$ che è aperto ma $\neq A$

ovvero A non è aperto

$\overline{A} = A \cup \mathcal{F}(A) = [3,4] \cup \{5,6\}$ che è chiuso e $\neq A$

ovvero A non è chiuso

Teorema (Un aperto è l'intorno di ogni suo punto)

A aperto $\Rightarrow \boxed{\forall x_0 \in A \quad \exists\,]x_0-\delta, x_0+\delta[\subset A}$

dim.

- A aperto sse $A = \mathring{A}$ sse $\underbrace{A \cap \mathcal{F}(A)}_{} = \emptyset$

A coincide con l'interno

A non contiene $\mathcal{F}(A)$

Assurdo $\exists x_0 \in A \quad \exists \delta > 0 :]x_0-\delta, x_0+\delta[\not\subseteq A$

Dato che $x_0 \in A$, $]x_0-\delta, x_0+\delta[\not\subseteq \complement A$

Però $]x_0-\delta, x_0+\delta[\not\subseteq A$

$\Rightarrow]x_0-\delta, x_0+\delta[\cap A \neq \emptyset$ & $]x_0-\delta, x_0+\delta[\cap \complement A \neq \emptyset$

$\Rightarrow \forall \delta > 0 \quad]x_0-\delta, x_0+\delta[\cap A \neq \emptyset \Rightarrow x_0 \in \mathcal{F}A$

$]x_0-\delta, x_0+\delta[\cap \complement A \neq \emptyset$

ASSURDO

Def (FONDAMENTALE - Punto di Accumulazione)

Dato $A \subseteq \mathbb{R}$, $\boxed{x_0 \in \mathbb{R}}$ è "punto di accumulazione per A"

(in breve p.d.a. per A)

se $\underline{\underline{\forall}}\, U \in \mathcal{J}_{x_0}$ $\quad \underbrace{A \cap (U \setminus \{x_0\})}_{\text{L'intorno U, privato di } x_0 \text{, contiene ancora elementi di A}} \neq \emptyset$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \frac{0}{0}$$

Def

$A \subseteq \mathbb{R}$ $\boxed{x_0 \in A}$ si dice "punto isolato di A"
se $\exists\, U \in \mathcal{J}_{x_0}$: $U \cap A = \{x_0\}$

$D(A) \equiv$ punti di accumulazione per A
$I(A) \equiv$ " isolati di A.

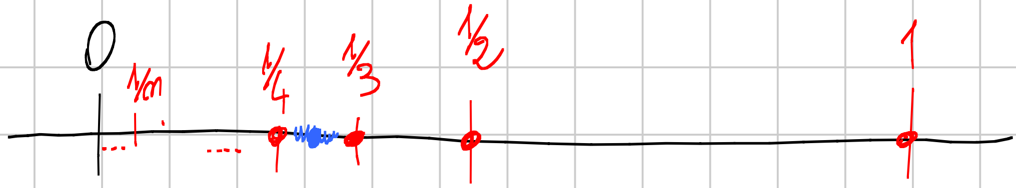
Oss: un punto $x_0 \in D(A)$ può $<\begin{matrix} \in A \\ \notin A \end{matrix}$

se $x_0 \in I(A)$ allora $x_0 \in A$

Esempio $A = \{ \frac{1}{n} : n \geq 1 \}$

$\boxed{\mathcal{F}(A) = A \cup \{0\}}$ $\boxed{I(A) = A}$ $\boxed{D(A) = \{0\}}$ $\boxed{\bar{A} = \mathcal{F}(A)}$

$\mathring{A} = A \setminus \mathcal{F}(A) = \emptyset$.



$\forall x_0 \in A \qquad x_0 \in \mathcal{F}(A)$

$x_0 \in A \Rightarrow x_0 = 1/n_0 \qquad \delta = \frac{1}{n_0} - \frac{1}{n_0+1} \qquad]\frac{1}{n_0}-\delta, \frac{1}{n_0}+\delta[\, \cap A \ni \frac{1}{n_0}$

$]\frac{1}{n_0}-\delta, \frac{1}{n_0}+\delta[\, \cap \complement A \ni \frac{1}{n_0}+\frac{\delta}{2}$

$\Downarrow$

$x_0 \in \mathcal{F}(A)$

$x_0 = 0 \quad (0 \notin A) \quad x_0 = 0 \in \mathcal{F}(A)$

$\exists\ \forall \delta > 0 \qquad]-\delta, \delta[\, \cap A \neq \emptyset \quad (1)$

$]-\delta, \delta[\, \cap \complement A \neq \emptyset \quad (2)$

(2) è immediata poiché $]-\delta,\delta[\, \cap \complement A \supseteq\ ]-\delta, 0]$

(1) $\forall \delta > 0 \quad]-\delta,\delta[\, \cap A \neq \emptyset$

ovvero $\forall \delta > 0 \quad \exists n \geq 1 : \ ]-\delta, \delta[\, \ni 1/n$

Ricordo che $\forall \delta > 0 \ \exists n : \delta > 1/n$

dunque $\forall \delta \quad]-\delta,\delta[\, \cap A \neq \emptyset$

$\mathcal{I}(A) = A$

infatti $\forall\, 1/n_0 \in A, \ \exists \delta = \frac{1}{n_0} - \frac{1}{(n_0+1)} : \ ]\frac{1}{n_0}-\delta, \frac{1}{n_0}+\delta[\, \cap A = 1/n_0$

$\mathcal{D}(A) = \{0\}$

$\forall \delta > 0 \quad \left( ]-\delta, \delta[\setminus \{0\} \right) \cap A \neq \emptyset$

ovvero che $0 \notin A$

$\nexists$ eq. $\quad]-\delta, \delta[\cap A \neq \emptyset$

ma $\forall \delta > 0 \ \exists n : \quad 0 < \frac{1}{n} < \delta \Rightarrow A \cap]-\delta, \delta[\neq \emptyset$

$x_0 < 0 \Rightarrow \exists \delta = |x_0| \ : \ ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap A = \emptyset$

$A \not\ni x_0 > 0 \Rightarrow \exists n_0 : \quad \frac{1}{n_0+1} < x_0 < \frac{1}{n_0}$

$\Rightarrow$ preso $\delta = \left(\frac{1}{2}\right)^{n_0+1} \quad]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap A = \emptyset$

$\mathring{A} = \emptyset \qquad \overline{A} = A \cup \mathcal{D}(A) = A \cup A \cup \{0\} = A \cup \{0\}$

Teorema

$$\bar{A} = A \cup \mathcal{F}(A) = \mathcal{D}(A) \cup \mathcal{I}(A)$$

ovvero i punti di $\bar{A}$ sono $<$ di accumulazione / isolati

dim

Una volta selezionato $\mathcal{I}(A)$, se $x_0 \notin \mathcal{I}(A)$ allora $\forall U \in \mathcal{I}_{x_0}$
$U \cap (A \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset \Rightarrow x_0 \in \mathcal{D}(A)$ ↯

Teorema

$\forall x_0 \in \mathring{A}$, x_0 è punto di accumulazione

dim

Essendo $\mathring{A}$ l'interno di $A \Rightarrow \mathring{A}$ è aperto

$\Rightarrow \forall x_0 \in \mathring{A} \quad \exists\,]x_0-\delta, x_0+\delta[\subseteq \mathring{A}$

Fissato $x_0 \in \mathring{A} \quad \exists\, \tilde{\delta} > 0 : \ ]x_0-\tilde{\delta}, x_0+\tilde{\delta}[\subseteq A$

La nostra Tesi è la seguente

Tesi $\forall U \in \mathcal{I}_{x_0} \quad (U \setminus \{x_0\}) \cap A \neq \emptyset$

ovvero

Tesi$_{eq}$ $\forall \delta > 0 \quad (]x_0-\delta, x_0+\delta[\setminus \{x_0\}) \cap A \neq \emptyset$

$\delta < \tilde{\delta} \Rightarrow \ ]x_0-\delta, x_0+\delta[\setminus \{x_0\} \subseteq \ ]x_0-\tilde{\delta}, x_0+\tilde{\delta}[\setminus \{x_0\}$

$\Rightarrow \ ]x_0-\delta, x_0+\delta[\setminus \{x_0\} \subseteq A$

$\Rightarrow (]x_0-\delta, x_0+\delta[\setminus \{x_0\}) \cap A \neq \emptyset$

$\delta \geq \tilde{\delta} \Rightarrow \ ]x_0-\tilde{\delta}, x_0+\tilde{\delta}[\setminus \{x_0\} \subseteq \ ]x_0-\delta, x_0+\delta[\setminus \{x_0\}$

$\Rightarrow \ ]x_0-\tilde{\delta}, x_0+\tilde{\delta}[\cap \ ]x_0-\delta, x_0+\delta[\subseteq A$

$$\Rightarrow \underbrace{\left( ]x_0-\tilde{\delta}, x_0+\tilde{\delta}[\cap]x_0-\delta, x_0+\delta[\setminus \{x_0\} \right)}_{\neq \emptyset} \subseteq \left( ]x_0-\delta, x_0+\delta[\setminus \{x_0\} \right) \cap A$$

$$\Rightarrow \left( ]x_0-\delta, x_0+\delta[\setminus \{x_0\} \right) \cap A \neq \emptyset \quad \lightning$$

Esempio $A = \{1,2\} \cup]3,4]$

dim

$D(A) =$ punti di accumulazione di A

$= [3,4]$

$I(A) =$ punti isolati di A $= \{1,2\}$

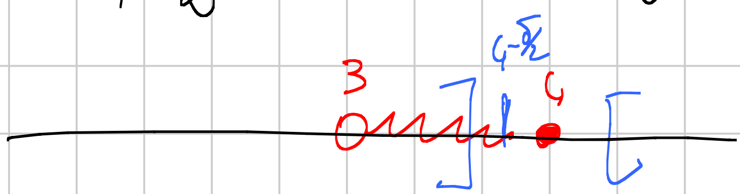
1 è isolato per A infatti $\left]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right[\cap A = \{1\}$

2 " " " A " $\left]\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right[\cap A = \{2\}$

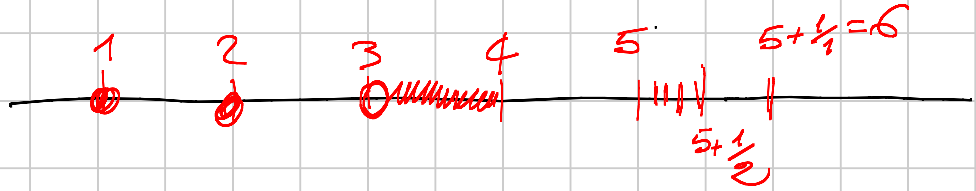
4 è punto di accumulazione $\delta < 1$

$$]4-\delta, 4+\delta[\cap (A \setminus \{4\}) \neq \emptyset$$

infatti $4 - \frac{\delta}{2} \in]4-\delta, 4+\delta[\cap (A \setminus \{4\})$



Esercizio Dato $A=\{1,2\}\cup]3,4]\cup\{5+\frac{1}{n}\ \ n\geq 0\}$



$\mathcal{F}(A) = \{1,2,3,4\} \cup \{5+\frac{1}{n} : n\geq 0\} \cup \{5\}$

A non è chiuso: $3\in \mathcal{F}(A)$ ma $3\notin A$

A non è aperto: $5\in A$ ma $]5-\delta, 5+\delta[\, \cap \complement A \neq \emptyset \ \forall \delta>0$

$\overline{A} = \{1,2\} \cup [3,4] \cup \{5\} \cup \{5+\frac{1}{n} : n\geq 1\}$

$\mathring{A} =]3,4[$

$\mathcal{I}(A) = \{1,2\} \cup \{5+\frac{1}{n} : n\geq 1\}$

$\mathcal{D}(A) = [3,4] \cup \{5\} = \overline{A} \setminus \mathcal{I}(A)$