Lezione 8 - Analisi Matematica 1 - 22 ottobre 2012

INTORNO

PUNTO DI ACCUMULAZIONE

Def Dato $x_0 \in \mathbb{R}$, diciamo che U è un intorno di x_0 se $\exists\,]x_0-\delta, x_0+\delta[\, \subset U$ con $\delta>0$

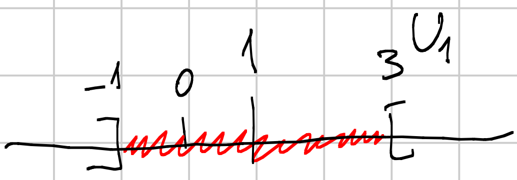
Esempi

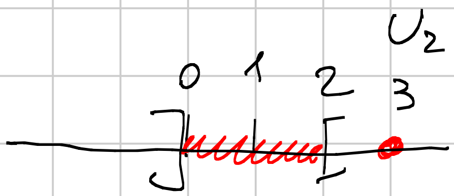
$x_0 = 1$ $\quad U_1 =]1-2, 1+2[\, =]-1, 3[$ questo è un intorno di 1

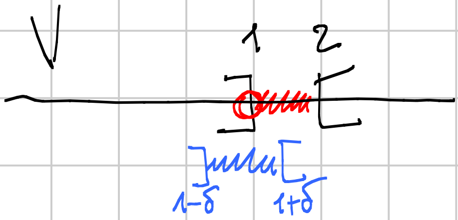
$U_2 =]0,2[\, \cup \{3\}$ è un intorno di 1

$V =]1,2[$ questo NON è un intorno di 1 in quanto

$\forall \delta>0 \quad]1-\delta, 1+\delta[\, \not\subset]1,2[\quad \left(\underbrace{]1-\delta,1[\, \cap\,]1,2[}_{=\emptyset} \right)$







$\forall \delta>0 \quad]1-\delta, 1[\, \cap\,]1,2[\, = \emptyset$

Def Dato un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$, x_0 si dice "punto di frontiera per A" e si scrive $x_0 \in \mathcal{F}(A)$

se $\forall U \in \mathcal{U}_{x_0} = \{\text{insieme degli intorni di } x_0\}$

$$U \cap A \neq \emptyset \quad e \quad U \cap \underbrace{\complement A}_{\text{complementare di } A} \neq \emptyset$$

Esempi

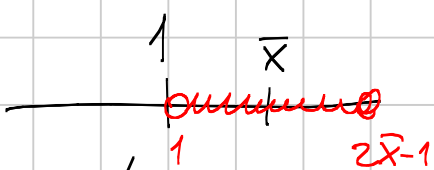
① $A = \{1\}$ $\qquad \complement A = \mathbb{R} \setminus \{1\} =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$

$\mathcal{F}(A) = \{1\} = A$

$$]1-\delta, 1+\delta[\quad \begin{cases} 1 \in]1-\delta, 1+\delta[\cap A \neq \emptyset \\ \left(1+\frac{\delta}{2}\right) \in]1-\delta, 1+\delta[\cap \left(]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[\right) \neq \emptyset \end{cases}$$

$\Rightarrow 1 \in \mathcal{F}(A)$

$\bar{x} > 1$, sia $\boxed{\delta = \bar{x} - 1}$



Si osserva che $\underbrace{]\bar{x}-\delta, \bar{x}+\delta[}_{]1, 2\bar{x}-1[} \cap A = \emptyset$

$\exists \delta = \bar{x} - 1 :]\bar{x}-\delta, \bar{x}+\delta[\subseteq \complement A \iff \bar{x} \notin \mathcal{F}(A)$

$\bar{x} < 1$ sia $\delta = 1 - \bar{x}$

Si osserva che $]\bar{x}-\delta, \bar{x}+\delta[=]\bar{x}-1+\bar{x}, 1[\subseteq \complement A$

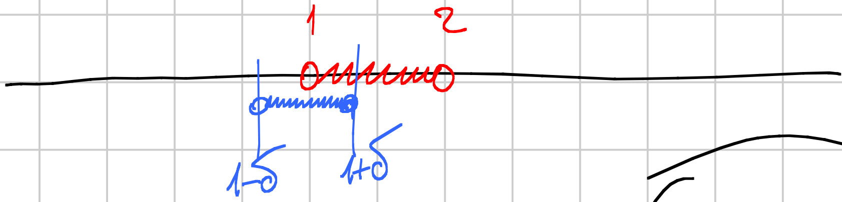
$\Rightarrow \exists \delta = 1 - \bar{x} :]x-\delta, x+\delta[\subseteq \complement A \iff \bar{x} \notin \mathcal{F}(A)$

$\mathcal{F}(A)=\{1\}$

Oss $x_0 \in \mathcal{F}(A)$ può non appartenere ad A

infatti, $A=]1,2[$

$x_0=1 \notin A$ però $x_0=1\in \mathcal{F}(A)$



$1-\frac{\delta}{2} \in]1-\delta, 1+\delta[\cap \complement(]1,2[) =]1-\delta,1+\delta[\cap \complement A \neq \emptyset$

$\min\{1+\frac{\delta}{2}, \frac{3}{2}\} \in]1-\delta,1+\delta[\cap]1,2[=]1-\delta,1+\delta[\cap A \neq \emptyset$

$1 \in \mathcal{F}(A)$

$A=]1,2[$ $\quad \mathcal{F}(A)=\{1,2\}$ (da dimostrare)

Def $A\subseteq \mathbb{R}$ si dice "Aperto" se $\mathcal{F}(A)\subseteq \complement A$

Def $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice "Chiuso" se $\mathcal{F}(A) \subseteq A$

Oss A chiuso sse $\complement A$ è aperto

Esempio (•) $A=\{1\}$ $\quad \mathcal{F}(A)=A \Rightarrow A$ è chiuso

(••) $\complement(A) =]-\infty,1[\,\cup\,]1,+\infty[$ è aperto

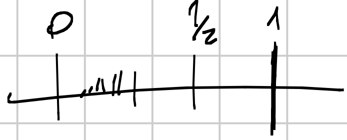
(∴) esistono insiemi che non sono né aperti né chiusi

$B=[1,2[$ $\qquad 1\in \mathcal{F}(B)\cap B$

$\qquad\qquad\qquad 2\in \mathcal{F}(B)\cap \complement B$

$\mathcal{F}(A)=A\cup\{0\}$

$A=\left\{\frac{1}{n} : n\geq 1\right\}$



$\boxed{\text{OSS}}$ $\quad \mathcal{F}(B) = \mathcal{F}(\complement B) \quad \forall B\subseteq\mathbb{R}$