Lezione 9 - Analisi Matematica 1 - 21 ottobre 2012

Titolo nota 08/10/2012

$i \notin \mathbb{R}$

$z = a + ib \in \mathbb{C}$ $a = \operatorname{Re} z$, $b = \operatorname{Im} z$, $i^2 = -1$

$\bar{z} = \overline{a+ib} = a - ib$ "coniugato" di z

Proprietà di $\bar{\cdot} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$

$z = a+ib$ $w = c+id$ ...

$\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$

$\overline{(\bar{z})} = z$

$z = \bar{z}$ se $\operatorname{Im} z = 0$ se $z \in \mathbb{R}$

$z = -\bar{z}$ se $\operatorname{Re} z = 0$ se $z = ib \in i\mathbb{R}$

$\operatorname{Re} z = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$ $\operatorname{Im} z = \dfrac{z - \bar{z}}{2}$

Teorema

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 \qquad a_i \in \mathbb{R} \quad i=0 \dots n$$

Se $P(\omega)=0$ allora $P(\overline{\omega})=0$

dim

$$P(\omega)=0 \Rightarrow \overline{P(\omega)} = \overline{a_n z_n + \dots + a_1 z + a_0} = 0$$

Questo Teorema chiarisce perchè nei polinomi a coefficienti reali ogni radice complessa compare insieme con la radice complessa coniugata.

Esercizio:

Determinate le radici di $z^2+2(2-i)z-(4i-2)=0$

1° modo $z_{1,2}=i-2+\sqrt{(2-i)^2+(4i-2)}$

$$=i-2+\sqrt{4-1-4i+4i-2}$$

$$=i-2+\sqrt{1}$$

$z_1=-1+i \qquad z_2=-3+i$

2) $z^2+2(2-i)z-(4i-2)=0$

$z=a+ib \qquad (a+ib)^2+(4-2i)(a+ib)-4i+2=0$

$$a^2-b^2+2iab+4a+4ib-2ia+2b-4i+2=0$$

$$\begin{cases} \\ 2ab+4b-2a-4=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} '' \\ 2a(b-1)+4(b-1)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2-b^2+4a+2b+2=0 \\ (2a+4)(b-1)=0 \end{cases}$$

1 $\begin{cases} a^2-1+4a+2+2=0 \\ b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+4a+3=0 \\ b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1=-3+i \\ z_2=-1+i \end{cases}$

2 $\begin{cases} a=-2 \\ 4-b^2-8+2b+2=0 \end{cases}$

$$\boxed{\begin{cases} a=-2 \\ -b^2+2b-2=0 \end{cases}}$$

Non ha sol. Reali!!!

$$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{a^2+b^2} \qquad \text{"modulo" di } z$$

<u>Oss</u> $z \in \mathbb{R}$ $\quad |z|_{\mathbb{C}} = \sqrt{z \cdot \bar{z}} \underset{\substack{\uparrow \\ z=\bar{z}}}{=} \sqrt{z^2} = |z|_{\mathbb{R}}$

1) $|z| \geq 0$; $|z| = 0$ <u>sse</u> $z = 0$

2) $|\mathrm{Re}\, z| \leq |z| \quad \forall z \in \mathbb{C}$
$|\mathrm{Im}\, z| \leq |z|$

3) $|z| \leq |\mathrm{Re}\, z| + |\mathrm{Im}\, z|$
poniamo $z = a+ib$
$|z| = |a+ib| = \sqrt{a^2+b^2} \leq |a| + |b| = |\mathrm{Re}\, z| + |\mathrm{Im}\, z|$
infatti elevando al quadrato ambo i membri...

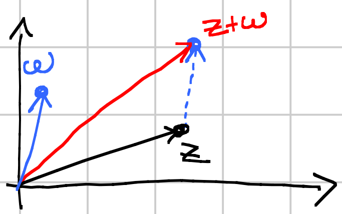
4) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$
(verifica diretta)

5) $|z| = |\bar{z}|$
(verifica immediata : preso $z = a + ib$ ...)

6) $|z+w| \leq |z| + |w|$
infatti, elevando al quadrato
$$|z+w|^2 = (z+w)(\bar{z}+\bar{w}) = |z|^2 + |w|^2 + z\bar{w} + \bar{z}w$$
$$= |z|^2 + |w|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z\bar{w})$$
$$\leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z|\cdot|w| = (|z| + |w|)^2$$
altrimenti $z = a+ib$ $\bar{w} = c - id$ $\mathrm{Re}(z\bar{w}) = ac + bd$ ...

Interpretazione geometrica : in un triangolo avente i lati di lunghezza a, b e c, si ha

$a \leq b + c$, $b \leq a + c$ e $c \leq a + b$



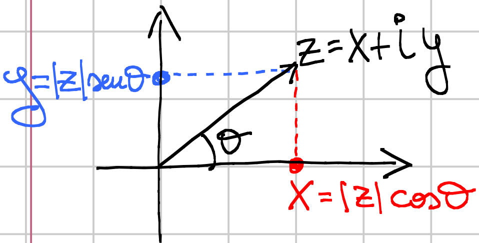
Esercizio: determinate tutte le soluzioni

(i) $2z + i = iz - 1$

(ii) $z^2 + 1 = 0$ (in 2 modi)

(iii) $z^2 - 2z + 5 = 0$ (in 2 modi)

Piano Complesso (di Argand - Gauss)

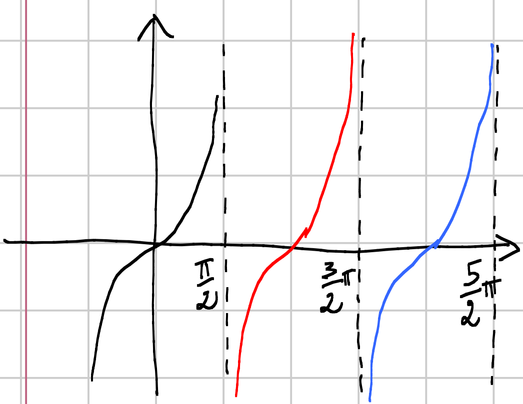


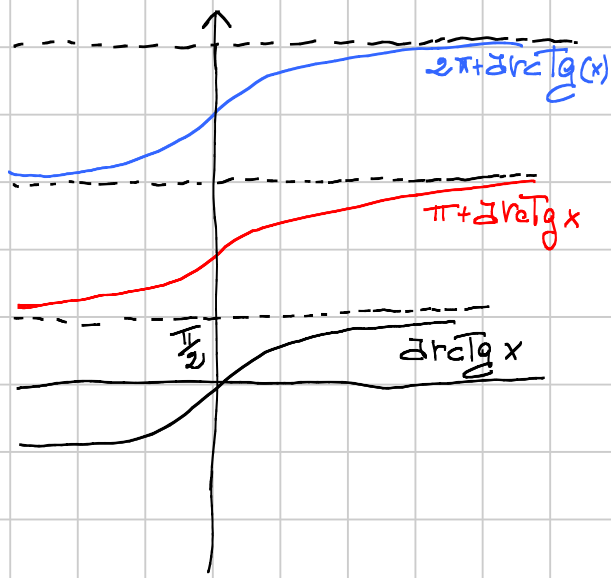
$$z=\rho(\cos\theta+i\,\text{sen}\,\theta)$$ **Forma Trigonometrica**

$$\begin{cases}\rho=\sqrt{x^2+y^2}\\ \theta=\arg(z)\end{cases}\qquad \begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\,\text{sen}\,\theta\end{cases}$$ dove

$z=a+ib$

$$\theta=\arg(z)=\begin{cases}\text{arctg}\,\frac{b}{a}, & \text{se } a>0,\ b\geq 0\\ \frac{\pi}{2}, & \text{se } a=0,\ b>0\\ \pi+\text{arctg}\,z, & \text{se } a<0\\ \frac{3}{2}\pi, & \text{se } a=0,\ b<0\\ 2\pi+\text{arctg}\,z, & \text{se } a>0,\ b<0\end{cases}$$





arg(z) è il più piccolo angolo formato dal vettore che congiunge z con l'origine

Oss: l'angolo $\arg(z) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, identifica lo stesso n.ro complesso.

Oss: In corrispondenza a $z = 0$ si trovano infiniti valori di ϑ

Oss: l'angolo ϑ è determinato da

$$\cos\vartheta = \frac{x}{\rho} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \operatorname{sen}\vartheta = \frac{y}{\rho} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Esempi scrivere in forma Trigonometrica

$z=-\sqrt{3}+i$; $z=1-i$; $z=1+\sqrt{3}\,i$; $z=-2-2i$

Interpretazione geometrica del prodotto

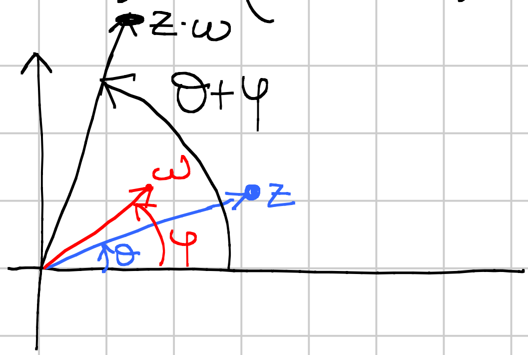
$z = x+iy = \rho\,(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$

$\omega = u+iw = r\,(\cos\varphi + i\,\text{sen}\,\varphi)$

$z\cdot\omega = \rho\cdot r\cdot(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)(\cos\varphi + i\,\text{sen}\,\varphi)$

$= \rho\cdot r\cdot\left(\cos\theta\cos\varphi - \text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\varphi + i\left(\cos\theta\,\text{sen}\,\varphi + \text{sen}\,\theta\cos\varphi\right)\right)$

$= \rho\cdot r\cdot\left(\cos(\theta+\varphi) + i\,\text{sen}\,(\theta+\varphi)\right)$



Ad esempio $z=i$ $\omega=1+i$

ovvero $z=\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2}\right)$ $\omega=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)$

e $z\cdot\omega=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\,\text{sen}\,\frac{3}{4}\pi\right)$

Teorema (Formula di De Moivre)

Preso $z = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) \in \mathbb{C}$

allora $\forall n \in \mathbb{N}$ $z^n = \rho^n(\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta))$

Oss: la dim si fa per induzione, e deve esser noto che

$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$

$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \cos y + \operatorname{sen} y \cos x$

dim

$n=0$ $\quad z^0 = 1 \overset{\checkmark}{=} \rho^0(\cos(0\cdot\theta) + i \operatorname{sen}(0\cdot\theta)) = 1 + i\cdot 0 = 1$

Base dell'induzione

Hip. Induttiva $\quad z^n = \rho^n(\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta))$

Devo provare $z^{n+1} \overset{?}{=} \rho^{n+1}(\cos((n+1)\theta) + i \operatorname{sen}((n+1)\theta))$

$z^{n+1} = z \cdot z^n \overset{\text{Hip. Induttiva}}{=} \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)\rho^n(\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta))$

$= \rho^{n+1}\left[\cos\theta\cos(n\theta) - \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}(n\theta) + i(\cos\theta \operatorname{sen}(n\theta) + \operatorname{sen}\theta\cos(n\theta))\right]$

$= \rho^{n+1}(\cos(n+1)\theta + i \operatorname{sen}(n+1)\theta)$ $\quad$ ↯

Esercizio

Calcolare $(1-i)^{100}$

dim.

$z = 1-i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{4}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{7}{4}\pi\right)$ Applico De Moivre

$$z^{100} = 2^{50}\left(\cos\frac{700}{4}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{700}{4}\pi\right) = 2^{50}\left(\cos(175\pi) + i\,\text{sen}\,(175\pi)\right)$$

$$= 2^{50}\left(\cos(2\pi\cdot 87+\pi) + i\,\text{sen}\,(2\pi\cdot 87+\pi)\right) = 2^{50}\left(\cos\pi + i\,\text{sen}\,\pi\right) = -2^{50}$$

Esercizio

Calcolare $(-1+i\sqrt{3})^{60}$

dim

$z = -1+i\sqrt{3}$ $\quad \arg(z) = \pi + \text{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{1}\right)$

$|z| = \sqrt{1+3} = 2$ $\quad = \pi - \text{arctg}\sqrt{3} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$

$$z = 2\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{2}{3}\pi\right)$$

$$z^{60} = 2^{60}\left(\cos\frac{120}{3}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{120}{3}\pi\right) = 2^{60}\left(\cos(40\pi) + i\,\text{sen}\,(40\pi)\right)$$

$$= 2^{60}$$

Esercizio: Dimostrare che $\forall\vartheta$

$$\begin{cases} \cos 3\vartheta = \cos^3\vartheta - 3\cos\vartheta\,\mathrm{sen}^2\vartheta \\ \mathrm{sen}\,3\vartheta = 3\cos^2\vartheta\,\mathrm{sen}\,\vartheta - \mathrm{sen}^3\vartheta \end{cases}$$

dim

$$(\cos\vartheta + i\,\mathrm{sen}\,\vartheta)^3 = \cos^3\vartheta + 3i\cos^2\vartheta\,\mathrm{sen}\,\vartheta - 3\cos\vartheta\,\mathrm{sen}^2\vartheta - i\,\mathrm{sen}^3\vartheta$$

come pure

$$(\cos\vartheta + i\,\mathrm{sen}\,\vartheta)^3 = \cos(3\vartheta) + i\,\mathrm{sen}(3\vartheta)$$

dunque $$\begin{cases} \cos 3\vartheta = \cos^3\vartheta - 3\cos\vartheta\,\mathrm{sen}^2\vartheta \\ \mathrm{sen}\,3\vartheta = 3\cos^2\vartheta\,\mathrm{sen}\,\vartheta - \mathrm{sen}^3\vartheta \end{cases}$$

Teorema (FONDAMENTALE ALGEBRA)

Dato $P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$

$\Rightarrow \exists\, z^* \in \mathbb{C} : P_n(z^*) = 0$

Traduzione: qualsiasi eq. algebrica di grado n a coefficienti in $\mathbb{C}$ (o in $\mathbb{R}$) ammette almeno 1 soluzione in $\mathbb{C}$

Corollario

Dato $P_n(z)$ polinomio di grado n, allora l'equazione

$$P_n(z) = 0$$

ammette n radici, purché si tenga conto della molteplicità.

Esempio: $(z-1)^{100} = 0$ ha come radice $z = 1$ con molteplicità 100!

Oss: Non faremo la dimostrazione del Teorema fondamentale dell'Algebra, ma bisogna tenerne conto quando si cercano le radici dell'equazione

$$z^3 + 1 = 0 \iff z^3 = -1$$

In campo Reale si trova la soluzione

$$z_1 = -1,$$

e, attraverso la divisione tra polinomi si ottiene

$$(z^3+1) = (z+1)(z^2 - z + 1)$$

da cui

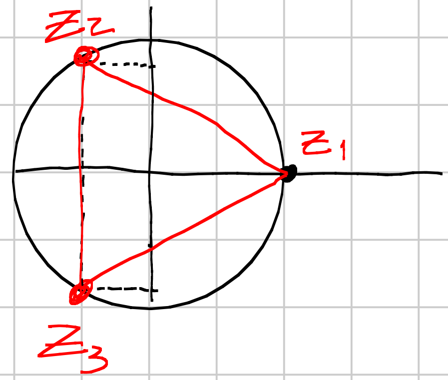
$$z_{2,3} = \frac{1 + \sqrt{1-4}}{2} \quad \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i = z_2 \\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i = z_3 \end{cases}$$

Quindi $z^3-1=0$ ha le tre radici

$z_1 = -1 \in \mathbb{R}$

$z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \in \mathbb{C}$

$z_3 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \in \mathbb{C}$



Queste cadono tutte sulla circonferenza $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$

e si dispongono ai vertici di un triangolo equilatero

Radici n-esime in $\mathbb{C}$

Dato un numero reale positivo o nullo ω, l'equazione

$x^{2k} = \omega$ ha 2 soluzioni (in campo reale)

$x^{2k+1} = \omega$ " 1 soluzione (" " ")

Dato un n.ro reale negativo ω, l'equazione

$x^{2k} = \omega$ NON ha soluzioni in $\mathbb{R}$

$x^{2k+1} = \omega$ ha una ed una sola soluzione in $\mathbb{R}$.

Def $\omega \in \mathbb{C}, \omega \neq 0$. Per ogni n esistono x_k $k=0,\dots,n-1$ n radici complesse di ω, contate con l'opportuna molteplicità

Teorema (Radici n-esime in $\mathbb{C}$)

$\omega \in \mathbb{C} \quad \omega = \rho(\cos\vartheta + i \operatorname{sen}\vartheta)$

Allora $\forall n \geq 1$ esistono n radici n-esime (complesse) di ω

$$z_k = \rho^{1/n}\left(\cos\left(\frac{\vartheta}{n} + \frac{2\pi}{n}\cdot k\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\vartheta}{n} + \frac{2\pi}{n}\cdot k\right)\right)$$

$k = 0, 1, \dots, n-1$

dim

Bisogna risolvere $z^n = \omega$, dove $z = r\cdot(\cos\phi + i\operatorname{sen}\phi)$

$$z^n = \omega \underset{\times \text{ De Moivre}}{\iff} r^n(\cos(n\phi) + i\operatorname{sen}(n\phi)) = \rho(\cos\vartheta + i\operatorname{sen}\vartheta)$$

$$\iff \begin{cases} r = \rho^{1/n} \\ \cos(n\phi) = \cos\vartheta \\ \operatorname{sen}(n\phi) = \operatorname{sen}\vartheta \end{cases} \Rightarrow \text{Per la periodicità di } \operatorname{sen}x \text{ e } \cos x \Rightarrow$$

$$\iff \begin{cases} r = \rho^{1/n} \\ n\phi = \vartheta + 2\pi\cdot k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\iff \begin{cases} r = \rho^{1/n} \\ \phi = \frac{\vartheta}{n} + \frac{2\pi}{n}\cdot k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$\forall k \in \mathbb{Z} \ \exists h \in \mathbb{Z} \ \exists r \in \{0, 1, \dots, n-1\} : k = hn + r$

$$\iff \begin{cases} r = \rho^{1/n} \\ \phi = \frac{\vartheta}{n} + 2\pi\left(h + \frac{r}{n}\right) \end{cases} \quad \text{dove } r = 0, \dots, n-1, \ h \in \mathbb{Z}$$

Dunque risultano individuate n radici ($2h\pi$ è ininfluente)

$$z_r = \rho^{1/n}\left(\cos\left(\frac{\vartheta}{n} + \frac{2\pi}{n}\cdot r\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\vartheta}{n} + \frac{2\pi}{n} r\right)\right) \quad r = 0, 1, \dots, n-1$$

Per la periodicità di $\operatorname{sen}x$ e $\cos x$, al variare di h si trovano le radici z_r

↯

Nota bene: che le radici dovessero essere n "al più" poteva essere dedotto dal Teorema Fondamentale dell'Algebra: il polinomio

$$z^n - w = 0 \quad , \quad \text{con } w \in \mathbb{C}$$

ha n radici reali !!

Radici n-esime dell'unità

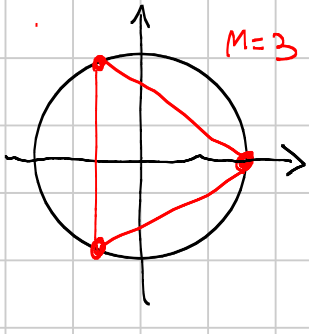
$$z = \sqrt[n]{1} = \left\{ z_k = \cos\left(\frac{2\pi}{n} \cdot k\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n} \cdot k\right) : k = 0, 1, \dots, n-1 \right\}$$

Ad esempio $n = 3$

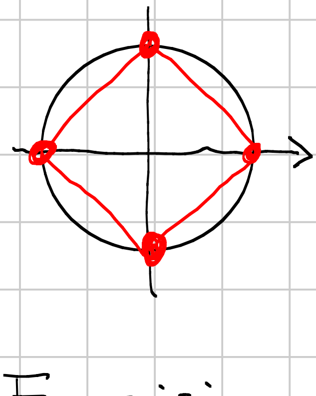
$$z_0 = 1 \qquad z_1 = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) \qquad z_2 = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right)$$

$$z_0 = 1 \qquad z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad z_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

e viene individuato un triangolo equilatero inscritto nella circonferenza $\{|z| = 1\}$.



Il caso $n = 4$ ovvero $\sqrt[4]{1}$



Esercizio Calcolare $\sqrt[3]{i}$