Lezione 8 - Analisi Matematica 1 - 17 ottobre 2013

Titolo nota 08/10/2012

$\mathbb{Q}$ denso in $\mathbb{R} \iff \forall x,y \in \mathbb{R} \quad \exists q \in \mathbb{Q} \quad x<q<y$

Teorema

$\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$

dim

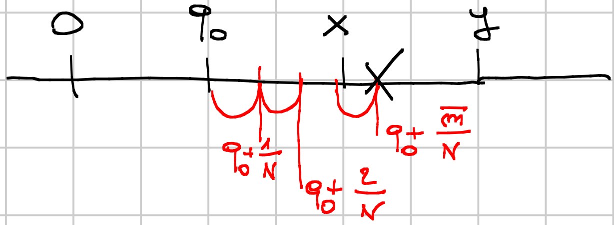
presi $x,y\in\mathbb{R}$ $x<y$ devo provare che $\exists\, q\in\mathbb{Q}$ tale che $x<q<y$

Per il corollario del principio di Archimede, $\exists\, N : \ 1/N < |y-x|$.

Se $x\in\mathbb{Q}$, allora $q = x+1/N \in \,]x,y[$, cioè la tesi

Se $y\in\mathbb{Q}$, allora $q = y-1/N \in \,]x,y[$, " " "

Supponiamo $x,y\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Per il principio di Archimede $\exists\, N_0\in\mathbb{N} : 0<q_0=1/N_0<x$



Facendo $\overbrace{\text{un numero } \bar m \text{ di passi}}$ di lunghezza $\frac{1}{N}<|y-x|$, si arriva in un punto razionale $q_0+\frac{\bar m}{N}\in\,]x,y[$

$$A=\left\{m\in\mathbb{N} : q_0+\frac{m}{N}>x\right\}\subseteq\mathbb{N} \qquad \left(q_0+\frac{m}{N}\in\mathbb{Q}!\right)$$

Proviamo che $A\neq\emptyset$:

$$q_0+\frac{m}{N}>x \iff \frac{m}{N}>x-q_0 \iff \boxed{m>N\overbrace{(x-q_0)}^{\in\mathbb{R}}} \quad (*)$$

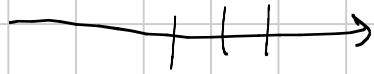
$(*)$ è vera: per il principio di Archimede $\exists\, m>N(x-q_0)$

ovvero $\exists\, m\in A$ ovvero $A\neq\emptyset$

$A \neq \emptyset,\ A \subseteq \mathbb{N} \Rightarrow \exists\ \bar{m} = \min A$

principio del minimo intero

$q_0 + \frac{(\bar{m}-1)}{N}$ X $q_0 + \frac{\bar{m}}{N}$



i) $q_0 + \bar{m} \cdot \frac{1}{N} > x$ in quanto $\bar{m} \in A$

ii) $\bar{m} - 1 \notin A \iff \underbrace{q_0 + (\bar{m}-1)\frac{1}{N} < x}$

($\bar{m}$ è il minimo di A)

$\Rightarrow x < \boxed{q_0 + (\bar{m}-1)\frac{1}{N} + \frac{1}{N}} < x + \frac{1}{N} < x + (y-x) = y$

e questo prova la tesi: il punto $q_0 + \frac{\bar{m}}{N} \in \mathbb{Q}$

e si ha $\quad x < q_0 + \frac{\bar{m}}{N} < y$

Esercizio: Provare che $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$

(si può utilizzare la dim precedente, e l'unico caso interessante è $x, y \in \mathbb{Q}$)

Ai tempi di Cardano, cercavano le sole radici POSITIVE di un'equazione.

$$f(x) = x^3 + q x^2 + p x + d \qquad q, p, d \in \mathbb{R}$$

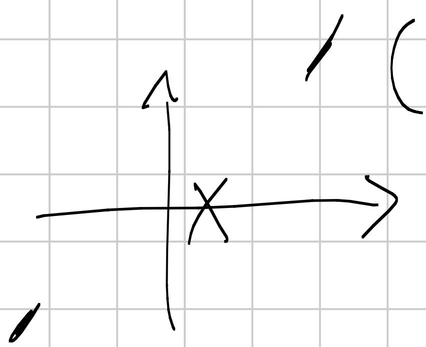
$$\sup\{f(x) : x \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \sup\left\{ x^3\left(1 + \frac{q}{x} + \frac{p}{x^2} + \frac{d}{x^3}\right) : x \in \mathbb{R}\right\}$$

$$= +\infty \qquad \left(\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty\right)$$

$$\inf\{f(x) : x \in \mathbb{R}\} = \dots = -\infty$$

$$\left(\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty\right)$$



CARDANO SAPEVA CHE UNA SOLUZIONE REALE ESISTEVA

I numeri complessi

Girolamo Cardano (1501–1576)

matematico, medico, astrologo e baro
pubblicò le soluzioni dell'equazione cubica

$$\boxed{x^3+px+q=0}$$

L'idea è di cercare $x=u+v$

$\rightarrow u^3+3u^2v+3uv^2+v^3+p(u+v)+q=0$

$\rightarrow u^3+v^3+q+(u+v)[3uv+p]=0$

Imponendo $3uv+p=0$ si ottiene

$$\begin{cases} uv=-p/3 \\ u^3+v^3=-q \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u^3v^3=-p^3/27 \\ u^3+v^3=-q \end{cases}$$

Ovvero $\begin{cases} x\cdot y=-p^3/27 \\ x+y=-q \end{cases}$ dove $x=u^3$ e $y=v^3$

sono le soluzioni di $\omega^2+q\omega-\frac{p^3}{27}=0$

$$\begin{cases} u^3=-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}} \\ v^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=\left[-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right]^{1/3} \\ v=\left[-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right]^{1/3} \end{cases}$$

La cosa curiosa è che, $\forall p,q\in\mathbb{R}$ esiste sempre una radice reale dell'equazione cubica di partenza. Questa radice, se calcolata attraverso la formula risolutiva, a volte si ottiene come $u+v$ con $u=\bar{v}\in\mathbb{C}$, e Cardano chiama "parti immaginarie" le radici di n.ri negativi !!!

Pb Determinare x e y tali che

$$\begin{cases} x \cdot y = 125 \\ x + y = 10 \end{cases}$$

ovvero si cercano le soluzioni dell'equazione $z^2 - 10z + 125 = 0$

$$z_{1,2} = 5 \pm \sqrt{25 - 125}$$

che non ha soluzione in $\mathbb{R}$

$$z_{1,2} = 5 \pm \sqrt{-100}$$

$\mathbb{C} = \{ \boxed{a + ib} : a, b \in \mathbb{R} \}$ $\boxed{i = \sqrt{-1}}$ unità immaginaria

$\boxed{i : i^2 \underset{\text{Def}}{=} -1}$ e quindi $\boxed{i \notin \mathbb{R}}$

$z = a + ib$ $\quad a = \mathrm{Re}\, z$: Parte reale di z

$b = \mathrm{Im}\, z$ Parte Immaginaria di z

Oss $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$: $\{ a + i \cdot 0 \} \equiv \mathbb{R}$ I n.ri reali sono quelli con parte immaginaria nulla

Om

I numeri reali sono contenuti in $\mathbb{C}$

$$\mathbb{R} = \{ z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\, z = 0 \}$$

$$= \{ z \in \mathbb{C} : z = a \;\; a \in \mathbb{R} \} \subseteq \mathbb{C}$$

$$(a+ib)+(c+id) \underset{\text{Def}}{:=} (a+c)+i(b+d)$$

<u>Oss</u> $a+b = a+b$ Se sommo n.ri Reali trovo la somma che conoscevo

$$(a+ib)\cdot(c+id) \underset{\text{Def}}{:=} (ac-bd)+i(ad+bc)$$

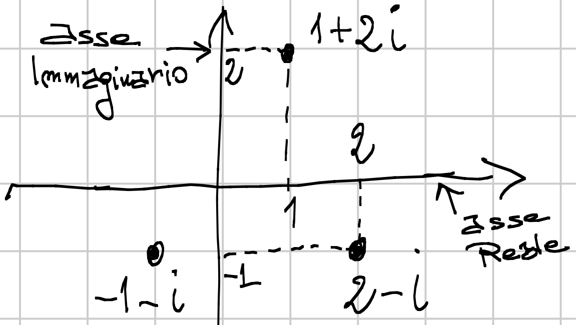
$$(a+ib)\cdot(c+id) = ac + iad + ibc + i^2 bd$$

$$= ac - bd + i(ad+bc)$$

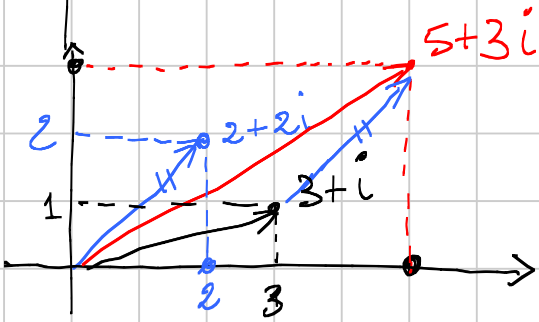
OM

Parte Reale, Parte Immaginaria

$\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2 \qquad a+ib \leftrightarrow (a,b)$



Piano di Argand GAUSS



$(3,1)+(2,2) = (5,3)$

Dunque la somma tra numeri complessi è legata alla "regola del parallelogramma" già nota quando si sommavano i vettori di $\mathbb{R}^2$

Esempio

Risolvere l'equazione $z^2+z+4=0$

$$\Delta = 1-4\cdot 4 = -15 < 0$$

$\Rightarrow$ 2 soluzioni complesse e coniugate

$z = x+iy$ Sostituendo si ottiene

$$(x+iy)^2 + (x+iy) + 4 = 0 \qquad \boxed{i^2=-1}$$

$$x^2+2ixy-y^2+x+iy+4=0$$

$$\underbrace{(x^2-y^2+x+4)}_{\text{Parte reale}} + \underbrace{iy(1+2x)}_{\text{parte immaginaria}} = 0$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} x^2-y^2+x+4=0 \\ y(1+2x)=0 \end{cases}$$ È un sistema REALE

$$\boxed{A\cdot B = 0 \Leftrightarrow A=0 \text{ o } B=0}$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} y^2 = x^2+x+4 \\ y=0 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} y^2=x^2+x+4 \\ x=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \cancel{\begin{cases} x^2+x+4=0 \\ y=0 \end{cases}} \qquad o \qquad \begin{cases} y^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 4 = \frac{15}{4} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

NON HA SOL. REALI

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y = \frac{\pm\sqrt{15}}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \quad z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{2} \qquad z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{2} \quad ↯$$

<u>Esempio</u> Soluzioni di:

$$z + i = -3 + i \cdot z$$

dim

$$z = x + iy \qquad x + iy + i = -3 + i(x+iy)$$

$$\Longleftrightarrow x + iy + i + 3 - ix + y = 0$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x + y + 3 = 0 \\ y + 1 - x = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y+1+y+3 = 0 \\ x = y+1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2y = -4 \\ '' \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = -2 \\ x = -1 \end{cases}$$

$z = -1 - 2i \qquad z + i = -3 + i \cdot z$

Verifica

$$-1-2i+i \overset{?}{=} -3 + i(-1-2i)$$

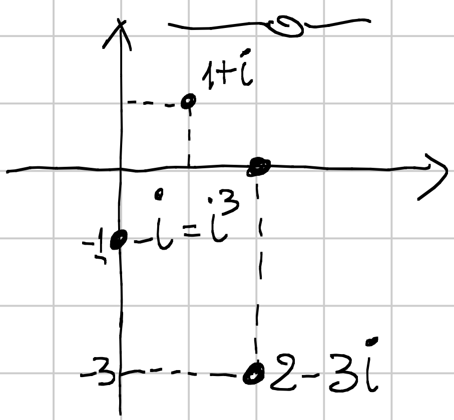
$$-1-i \overset{?}{=} -3 - i + 2 = -1-i$$

$\underline{\text{ok}}$ ✓

<u>Esercizio</u> Rappresentare $z = 1+i \quad z = 2-3i \quad z = -i$

$z = i^3$

Nel piano complesso



$$z = i^3 = i \cdot i^2$$

$$= -i$$

Esercizio Rappresentare $z = 1+i$ $z = 2-3i$ $z = -i$ $z = i^3$

ORDINE IN $\mathbb{C}$

- $\mathbb{R}$ è un insieme totalmente ordinato e l'ordine è compatibile con le operazioni
- Su $\mathbb{C}$ posso introdurre l'ordine lessicografico

Def $a+ib < c+id$ se $\begin{cases} a < c \\ \text{o} \\ a = c \text{ e } b < d \end{cases}$

- Con l'ordine lessicografico $0 < i$

$0+i0 \overset{?}{<} 0+i\cdot 1$? Sì.

Se c'è compatibilità con la moltiplicazione dovrà valere
$z_1 \le z_2$ e $i > 0 \Rightarrow i \cdot z_1 \le i z_2$

Prendo $z_1 = i$ e $z_2 = 10i$

$i < 10i$ $i > 0$ $\Rightarrow i \cdot i = -1 < -10 = 10i \cdot i$

ordine lessicografico

ASSURDO!!

Dunque non si mantiene l'ordine lessicografico
ovvero
l'ordine lessicografico su $\mathbb{C}$ non è compatibile con le operazioni.

Vale un risultato molto più forte

"Qualsiasi sia l'ordine totale introdotto su $\mathbb{C}$, questo ordine non sarà compatibile con le operazioni."

Pb: $\frac{1}{1+i} \in \mathbb{C}$? È della forma $a+ib$?

No, però si può ovviare al problema "razionalizzando"

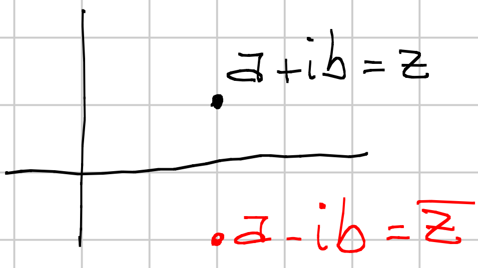
$$\frac{1}{1+i}\cdot\underbrace{\frac{1-i}{1-i}}_{=1} = \frac{1-i}{1^2-i^2} = \frac{1-i}{1+1}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{i}{2} \in \mathbb{C}$$

$\frac{1}{2} = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1+i}\right)$

$-\frac{1}{2} = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{1+i}\right)$

Def Dato $z = a+ib \in \mathbb{C}$, $\bar{z}$ è detto CONIUGATO di z se $\boxed{\bar{z} = a - ib}$



$z = a+ib$

Oss $z\cdot\bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2+b^2 \in [0,+\infty[$

ovvero

$z\cdot\bar{z} \in \mathbb{R} \quad \forall z \in \mathbb{C}$

Oss $\overline{(\bar{z})} = \bar{\bar{z}} = z$ (il coniugio è un'operazione involutoria)

Oss $\mathrm{Re}\, z = \mathrm{Re}\, \bar{z}$ mentre $\mathrm{Im}\, z = -\mathrm{Im}\, \bar{z}$

Oss $z \in \mathbb{R}$ sse $z = \bar{z}$

$\Rightarrow$ $z \in \mathbb{R}$ $z = a + i \cdot 0 \Rightarrow \bar{z} = a + i(-0) \Rightarrow \bar{z} = a = z$ ✓

$\Leftarrow$ $z = \bar{z} \Rightarrow \cancel{a} + ib = \cancel{a} - ib \Rightarrow 2ib = 0$

$\Downarrow$

$b = 0$

$\Downarrow$

$z = a \in \mathbb{R}$

Def $z \in \mathbb{C}$ $z = a + ib$

diciamo MODULO di z $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$

$= \sqrt{a^2 + b^2}$

Oss $z = 1 + 3i$ $|z| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$

Oss $z = 3 \in \mathbb{R}$ $|z| = \sqrt{3^2} = |3| = 3$

ritrovo il modulo introdotto in $\mathbb{R}$

$z = -3$ $|z| = \sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$

Def. Dato $z = a + ib \in \mathbb{C}$, diciamo MODULO di z il numero reale $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$

Oss $|z| \in [0, +\infty[$, ovvero $|\cdot| : \mathbb{C} \to [0, +\infty[$

Esempio $z = 1 - 3i$ $\quad |z| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$